

10. Elektromagnetismus und Gravitation

Im 19. Jahrhundert wurden elektrische und magnetische Effekte intensiv erforscht. Mit der Erfindung der ersten funktionsfähigen Batterie durch Alessandro Volta wurden grundlegende experimentelle Untersuchungen möglich. Dies wurde bereits in Kap. 1.4 dargestellt, außerdem sind dort weitere Details zu den wesentlichen Entwicklungen und den vielen daran beteiligten Personen zusammengefasst.

Das wichtigste Ergebnis ist, dass sich alle elektromagnetischen Vorgänge auf die Darstellungen der Maxwell-Gleichungen zusammenfassen lassen. Diese sind in Kap. 10.1 aufgeführt, anschließend wird ein formaler Vergleich mit den Gegebenheiten bei der Gravitation vorgenommen. Zum Verständnis sind Grundlagen der Vektorrechnung erforderlich, deren wichtigste Elemente in kurzer Form in Anlage E zusammengefasst sind.

10.1 Maxwell-Gleichungen

Die Maxwell-Gleichungen bestehen aus 4 Gesetzen. Nachfolgend ist deren Bezeichnung und eine kurze Erklärung aufgeführt. Die Formelmäßige Darstellung und die grundlegende Bedeutung sind in der Tab. 10.1 zusammengefasst. In Tab. 10.2 folgen die Bezeichnung der Formelzeichen und die zugehörigen Dimensionen.

1. Gaußsches Gesetz

Das Gaußsche Gesetz beschreibt in der Elektrostatik und Elektrodynamik den elektrischen Fluss durch eine geschlossene Fläche. Es ist benannt nach dem Mathematiker Carl Friedrich Gauß, der den nach ihm benannten Integralsatz für ein Vektorfeld entwickelte.

2. Gaußsches Gesetz für Magnetfelder

Hiermit wird analog zum elektrischen Feld der magnetische Fluss durch eine geschlossene Fläche beschrieben.

3. Induktionsgesetz

Dieses von Michael Faraday entdeckte Gesetz beschreibt den Aufbau von elektrischen Feldern.

4. Erweitertes Durchflutungsgesetz

Hiermit wird basierend auf dem Gesetz von André-Marie Ampère der Aufbau eines magnetischen Feldes beschrieben.

10. Elektromagnetismus und Gravitation

Zum besseren Verständnis der Zusammenhänge wurden die 4 Maxwell-Gleichungen in Tab. 10.1 so angeordnet, dass sich vom statischen elektrischen Feld über die dynamischen Veränderungen von elektrischen und magnetischen Eigenschaften die Abfolge bis zum statischen Magnetfeld ergibt. Dabei stellt die Kopplung der elektrischen und magnetischen Feldkonstanten die Verbindung zwischen den beiden Elementen dar. In der rechten Hälfte der Abbildung wurde die jeweilige Bedeutung der Beziehungen hinzugefügt.

<p>(1) $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{el}}{\epsilon_0}$</p> <p>$\vec{F} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 s^2} \cdot \vec{s}_0$</p> <p>$\epsilon_0 = 8,8542 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}$</p>	<p>Elektrisches Feld</p> <p>Quelle: Ladung</p> <p>Gleichartige Ladungen stoßen sich ab</p>
<p>(3) $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$</p>	<p>Die Änderung eines Magnetfelds \vec{B} bewirkt den Aufbau eines elektrischen Felds \vec{E} (in Form eines geschlossenen Wirbelfelds)</p>
<p>$\epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$</p>	<p>Die Feldkonstanten sind mit der Lichtgeschwindigkeit gekoppelt</p>
<p>(4) $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_{el} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$</p>	<p>Das Fließen eines elektrischen Stroms \vec{j}_{el} und die Änderung eines elektrischen Felds \vec{E} bewirken den Aufbau eines Magnetfelds \vec{B}</p>
<p>(2) $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$</p> <p>$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}$</p> <p>$\mu_0 = 1,2566 \cdot 10^{-6} \frac{Ns^2}{C^2}$</p>	<p>Magnetisches Feld</p> <p>Quellenfrei (Wirbelfeld)</p> <p>Gleichartige Pole stoßen sich ab</p>

Tab. 10.1: Maxwell-Gleichungen und deren Interpretation (Def. der Größen in Tab. 10.3)
Die Nummern der Gesetze sind der jeweiligen Formel vorangestellt.

10.2 Vergleich zwischen elektrischem Feld und Gravitation

Wegen der formalen Ähnlichkeit zwischen elektrischem Feld und Gravitationsfeld wurde schon früh angenommen, dass die Maxwell-Gleichungen auch hierbei Anwendung finden müssten. Als erster hat Heaviside bereits im Jahr 1895 diese These vertreten. Heute besteht allgemein Konsens darüber, dass diese Annahme zwar korrekt ist aber nur für den Grenzbereich kleiner Massen und Geschwindigkeiten gilt [94]. Für andere Gegebenheiten, insbesondere wenn Vorgänge mit großen Massen, wie z. B. bei schwarzen Löchern, betrachtet

10.2 Vergleich zwischen elektrischem Feld und Gravitation

werden, gelten andere Zusammenhänge und es müssen Raumkrümmung etc. berücksichtigt werden wie dies z. B. in der allgemeinen Relativitätstheorie der Fall ist.

Es gibt einen formalen Unterschied zwischen den Darstellungen des elektrischen Felds und der Gravitation. Weil die Beziehungen beim elektrischen Feld für einen homogenen Verlauf (wie z. B. in einem Kondensator der Fall mit Q als Ladung und s als Plattenstand) abgeleitet wurden, die Gravitation aber für eine räumliche Verteilung (mit m als Masse, r als Radius), unterscheiden sich die Berechnungen für die Kräfte:

Kraft im elektrischen Feld	Kraft im Gravitationsfeld
$\vec{F} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 s^2} \cdot \vec{s}_0 \quad (10.01)$	$\vec{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \cdot \vec{r}_0 \quad (10.02)$

Für einen Vergleich der Felder ist es sinnvoll, eine der Größen entsprechend umzuwandeln; wird hierfür die Gravitationskonstante gewählt dann entsteht

$$G' = \frac{1}{4\pi G} \quad (10.03)$$

Dies vorausgesetzt ergibt sich bei einer Gegenüberstellung die in Tab. 10.2 wiedergegebene Form. Hier sind zunächst die Maxwell-Gleichungen in abgewandelter Weise dargestellt, bei der auf die Nutzung der magnetischen Feldkonstante verzichtet und stattdessen die Kopplung mit der Lichtgeschwindigkeit genutzt wurde (vgl. Tab. 10.1). Auf diese Weise ist es nicht erforderlich, für das Gravitationsfeld entsprechende Größen neu zu definieren. Die entstehende Analogie zu den Maxwell-Gleichungen führt zur Definition eines Gleichungssystems, dessen physikalische Bedeutung heute allgemein als „Gravitoelektromagnetismus (GEM)“ [94] gedeutet wird (Tab. 10.2).

Maxwell-Gleichungen für Elektromagnetismus	Maxwell-Gleichungen für Gravitoelektromagnetismus
(1) $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{el}}{\epsilon_0}$	(1) $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_g = -\frac{\rho_g}{G'}$
(3) $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	(3) $\vec{\nabla} \times \vec{E}_g = -\frac{\partial \vec{B}_g}{\partial t}$
(4) $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{\vec{j}_{el}}{\epsilon_0 \cdot c^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$	(4) $\vec{\nabla} \times \vec{B}_g = -\frac{\vec{j}_g}{G' \cdot c^2} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}_g}{\partial t}$
(2) $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$	(2) $\vec{\nabla} \cdot \vec{B}_g = 0$

Tab. 10.2: Anwendung der Maxwell-Gleichungen auf das Gravitationsfeld. Die Nummern der Gesetze sind der jeweiligen Formel vorangestellt. Zu Definition und Anwendung des Nabla-Operators $\vec{\nabla}$ vgl. Anlage E.

10. Elektromagnetismus und Gravitation

Es wird hierbei vorausgesetzt, dass die Lichtgeschwindigkeit c und die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Gravitation gleich sind.

Die dargestellten Gleichungen entsprechen sich mit dem Unterschied, dass die Vorzeichen für die Gleichungen 1 und 4 verschieden sind. Dies hat für die Gleichungen 1 zunächst die einfache Bedeutung, dass sich Massen anziehen, während sich gleichartige Ladungen abstoßen. Bezüglich der Gleichungen 4 folgt daraus in gleicher Weise, dass sich gleichartige Pole im GEM-Feld nicht wie beim Elektromagnetismus abstoßen, sondern anziehen.

In diesem Zusammenhang besteht die interessante Frage, ob es für die Gravitation ein Äquivalent für positive und negative Ladungen gibt. Dies könnte für das Paar Materie/Antimaterie gelten. Für theoretische Betrachtungen ist von großer Bedeutung, ob sich Materie und Antimaterie anziehen, abstoßen, oder, wie manche Theorien voraussagen, schwächer anziehen als reine Materie. Hierzu hat es im Jahr 2023 einen ersten Durchbruch gegeben, als bei Untersuchungen am CERN an Antiwasserstoffatomen festgestellt wurde, dass diese von der Erdgravitation angezogen werden [95]. Es handelt sich hierbei um eines der interessantesten aktuellen Experimente, dessen Genauigkeit weiter erhöht werden soll, um grundlegende Fragen zu klären.

Physikalische Größe		Dim.	Physikalische Größe		Dim.
\vec{E}	Elektrische Feldstärke	$\frac{N}{C}$	\vec{E}_g	Gravitationsfeldstärke	$\frac{m}{s^2}$
\vec{B}	Magnetische Flussdichte	$\frac{Ns}{Cm}$	\vec{B}_g	Gravitomagnetische Feldstärke	$\frac{1}{s}$
\vec{M}	Moment	Nm	\vec{m}	Magnetisches Moment	$\frac{Cm^2}{s}$
\vec{j}_{el}	Elektrischer Volumenstrom	$\frac{C}{m^2s}$	\vec{j}_g	Massenvolumenstrom	$\frac{kg}{m^2s}$
ρ_{el}	Elektrische Ladungsdichte	$\frac{C}{m^2}$	ρ_g	Massendichte	$\frac{kg}{m^2}$

Tab. 10.3: Definition der verwendeten physikalischen Größen mit Dimensionen.

Trotz formaler Ähnlichkeit zwischen den in den Tab. 10.2 und Tab. 10.3 dargestellten Größen gibt es erhebliche Unterschiede in deren Ausprägung. Dies soll zunächst für elektrisches Feld und Gravitationsfeld betrachtet werden. Wird in einem einfachen Beispiel der Unterschied in den jeweiligen Anziehungskräften zwischen einem Proton und einem Elektron berechnet, so können dazu die Formeln (10.01) und (10.02) benutzt werden. Die Werte für die spezifischen Größen sind in Tab. 10.4 zusammengestellt. Werden die Werte eingesetzt, so ergibt sich für diesen Fall ein extremer Unterschied zwischen elektrischer und gravitativer Anziehungskraft, und zwar um den Faktor $2,27 \cdot 10^{39}$!

10.2 Vergleich zwischen elektrischem Feld und Gravitation

Masse Proton	$m_p = 1,6726 \cdot 10^{-27} \text{kg}$	Masse Elektron	$m_e = 9,1094 \cdot 10^{-31} \text{kg}$
Ladung Proton	$Q_p = 1,6022 \cdot 10^{-27} \text{C}$	Ladung Elektron	$Q_e = -1,6022 \cdot 10^{-27} \text{C}$
Gravitationskonstante	$G = 6,6743 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}$	Elektrische Feldkonstante	$\epsilon_0 = 8,8542 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2}$

Tab. 10.4: Werte der für die Berechnungen verwendeten physikalischen Größen.

Anmerkung zu Tab. 10.4: Die Werte für ϵ_0 werden in der Literatur oft mit der Dimension As/Vm angegeben. Dies lässt sich leicht umrechnen unter Nutzung der Leistung P in Watt [W] und ergibt mit der Ladung C (Coulomb) als As (Ampere·Sekunden)

$$\left[1\text{W} = 1 \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^3} = 1 \frac{\text{Nm}}{\text{s}} = 1 \text{VA} \right]$$

Der Unterschied zwischen elektrischem Feld und Gravitationsfeld besteht nicht nur in der Größe der Anziehungskraft, sondern vor Allem in der Tatsache, dass elektrische Ladungen sich im täglichen Leben kompensieren, d. h. jedem positiven Atomkern steht ein negatives Elektron gegenüber. Außerdem lassen sich elektrische Ladungen abschirmen. Bei der Gravitation addieren sich hingegen alle Massen auf und die wirksamen Anziehungskräfte lassen sich nach heutigem Wissen in keiner Weise beeinflussen.

Weitere wichtige Unterschiede bestehen darin, dass elektrische Ladungen immer als Vielfaches der Elementarladungen auftreten, während bei der Gravitation keine kleinste unteilbare Einheit bekannt ist. Außerdem ist die kinetische Energie von Massen vom Bewegungszustand abhängig, während dies für elektrische Ladungen nicht gilt. Des Weiteren sind Permeabilitätseffekte bei der Gravitation unbekannt.

Trotz der geringen Effekte gelang es bereits im Jahr 1798 mit der vom Engländer H. Cavendish [1731-1810] entwickelten Gravitationswaage Dichteunterschiede in der Erde zu bestimmen und die Gravitationskonstante zu berechnen.

Ein direkter experimenteller Nachweis für die Existenz des Gravitomagnetismus in der hier dargestellten Form ist auf der Erdoberfläche wegen der auftretenden extrem geringen Effekte bislang nicht gelungen. Nach Kalkulationen von D. Giulini würde ein am Nordpol aufgestellter Kreisel mit einer Geschwindigkeit von 0,6 Millibogensekunden pro Tag präzedieren; bei den derzeitigen experimentellen Gegebenheiten ist dies noch 1 bis 2 Größenordnungen außerhalb der Nachweisgrenzen [96].

In kosmischen Dimensionen treten dagegen größere Effekte auf, wobei die Gestalt eines solchen Feldes durch Berechnungen ermittelt werden kann. In Abb. 10.1 ist die Ausprägung eines gravitomagnetischen Dipolfeldes in einer graphischen Wiedergabe dargestellt, ausgewertet an Punkten im Winkelabstand von 30° , die auf einem Kreis um das Zentrum liegen [96]. Im Zentrum befindet sich der rotierende Stern, dessen Drehimpuls durch einen nach oben zeigenden Pfeil (Vektor) symbolisiert wird. Er erzeugt das Dipolfeld.

10. Elektromagnetismus und Gravitation

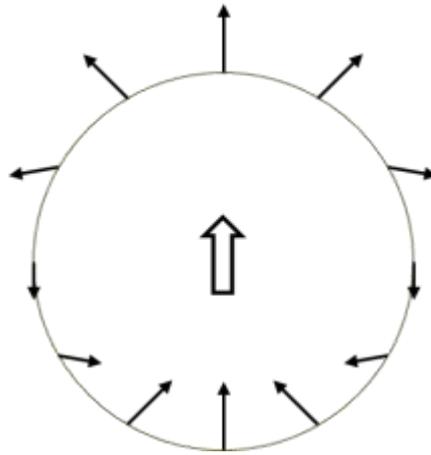


Abb. 10.1: Ausprägung eines gravitomagnetischen Dipolfeldes, das durch einen rotierenden Stern in der Mitte erzeugt wird [96].

Erst mit dem Start der Raumsonde Gravity Probe B im Jahr 2004, mit der die Wechselwirkungen zwischen 4 gegenläufig rotierenden Kreiseln und der rotierenden Erde untersucht wurden, war ein experimenteller Nachweis möglich. Nach langwierigen und komplizierten Auswertungen aufgrund von aufgetretenen Störeffekten wurden 2011 Ergebnisse veröffentlicht, die im Rahmen von Untersuchungen zur Verifizierung der Allgemeinen Relativitätstheorie gewonnen werden konnten [97]. Es handelt sich dabei um Auswirkungen der Raumzeit-Krümmung und um den Lense-Thirring-Effekt. Zu Details sei auf weiterführende Literatur verwiesen [96, 97].

Abschließend soll noch ein anderer interessanter Aspekt betrachtet werden. Es gibt seit Jahren Untersuchungen zur Verstärkung von gravitomagnetischen Effekten, ähnlich wie sie bei der Steigerung der Permeabilität von Magnetfeldern beobachtet werden (z. B. durch Zuführung eines Eisenkerns in eine Spule). Ein solcher Nachweis hätte enorme Auswirkungen auf die Grundlagen der allgemeinen Relativitätstheorie und unterliegt daher besonderer Beobachtung. In einem der Versuche wurde z. B. eine große Menge an rotierendem flüssigem Helium in einem supraleitenden Nb-Rohr verwendet und darin ein Gyroskop platziert. Nach ersten positiven Ergebnissen zur Steigerung des gravitomagnetischen Effektes zeigte sich aber, dass diese nicht reproduzierbar waren [98]. Keiner der bisher durchgeführten Versuche war erfolgreich und somit sind auch keine Auswirkungen auf die Theorie erkennbar.