

6. Relationen für Masse, Impuls, Kraft und Energie

In diesem Kapitel werden Betrachtungen im Zusammenhang mit der relativistischen Massenzunahme dargestellt. Es handelt sich dabei um bekannte Effekte wie der Einfluss auf die kinetische Energie aber auch um neue Untersuchungen. Diese sind das „Federparadoxon“, die relativistische Betrachtung des elastischen Stoßes (wichtig für die Bewertung von Kollisionen bei Elementarteilchen), der Signalaustausch während und nach Beschleunigungen und eine relativistische Raketenformel. Da einige der Darstellungen keine geschlossenen analytischen Lösungen erlauben sind in diesen Fällen numerische Lösungskonzepte beige-fügt.

Keine der durchgeführten Untersuchungen zeigt Widersprüche zu den Lorentz Gleichungen oder den Relativitätskriterien.

6.1 Relativistische Massenzunahme und Energie

In der historischen Entwicklung für die relativistische Massenzunahme wurde zunächst von „longitudinaler“ und „transversaler“ Massenzunahme gesprochen. Diese Begriffe wurden von H. A. Lorentz eingeführt [13,42], da bei der Beschleunigung von Elektronen Unterschiede längs und quer zur Bewegungsrichtung der Elektronen beobachtet wurden. Nach den experimentellen Befunden wurden für die transversale Masse m_t und die longitudinale Masse m_l folgende Beziehungen ermittelt:

$$m_t = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (6.01)$$

$$m_l = \frac{m_0}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \quad (6.02)$$

Dabei wurde der Wert für die Masse bestimmt, indem die wirkende Kraft durch die Beschleunigung dividiert wurde gemäß des Newtonschen Gesetzes

$$m = \frac{F}{a} \quad (6.03)$$

6.1 Relativistische Massenzunahme und Energie

Eine transversale Beschleunigung führt zu einer konstanten Kreisbewegung, während die longitudinale Beschleunigung die Bahngeschwindigkeit des Körpers und damit die longitudinale sowie auch die transversale Masse erhöht.

Nach heutigem Wissensstand stellt der Ausdruck in Gl. (6.01) die korrekte Zunahme der Masse mit der Beschleunigung dar. Der Ausdruck in Gl. (6.02) ergibt sich, wenn man statt Gl. (6.03) die korrekte Newtonsche Formulierung für die Kraft benutzt

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{d(mv)}{dt} = \frac{dm}{dt}v + m \frac{dv}{dt} \quad (6.04)$$

Setzt man Gl. (6.01) in Gl. 6.04) ein, so ergibt sich

$$F = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) v + \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{dv}{dt} \quad (6.05)$$

Mit

$$\frac{dm}{dt} \Rightarrow \frac{dm}{dv} \cdot \frac{dv}{dt} \quad (6.06)$$

folgt

$$F = \left(-\frac{1}{2} \right) \left(\frac{m_0}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{3/2}} \right) \left(-2 \frac{v}{c^2} \right) \frac{dv}{dt} v + \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{dv}{dt}$$

$$F = \left(\frac{m_0}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{3/2}} \right) \left(\frac{v^2}{c^2} \right) \frac{dv}{dt} + \frac{m_0 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{3/2}} \frac{dv}{dt} = \frac{m_0}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{3/2}} \frac{dv}{dt} \quad (6.07)$$

und damit der Ausdruck aus Gl. (6.02) für die longitudinale Masse. Die Werte für die Massen sind somit identisch und daher wurde auch etwa seit der Mitte des 20. Jahrhunderts die Trennung aufgehoben und man spricht heute üblicherweise von der relativistischen Masse gemäß Gl. (6.01).

Wie leicht zu erkennen ist, lässt sich der Ausdruck in Gl. (6.07) auch darstellen als

$$F = \frac{m_0}{\gamma^3} a \quad (6.08)$$

Dies bedeutet, dass bei einer konstanten, aus dem *ruhenden System* einwirkenden Kraft die im bewegten System auftretende Beschleunigung (ebenfalls gemessen vom ruhenden System aus) sich um den Faktor γ^3 unterscheidet. Von H. A. Lorentz wurde diese Gesetzmäßigkeit für ein von außen auf ein Elektron wirkendes elektrisches Feld abgeleitet. Bei der Betrachtung von Beschleunigungen, die durch Effekte innerhalb eines bewegten Systems hervorgerufen werden (wie z. B. bei einem Raketenantrieb) gelten die gleichen Gesetzmäßigkeiten. Wie in Kapitel 6.4 dargestellt, ergibt sich der Faktor γ^3 auch dann, wenn als einziges Kriterium zur Herleitung die relativistische Geschwindigkeitsaddition gewählt wird.

6. Relationen für Masse, Impuls, Kraft und Energie

In der Folge soll zusätzlich die kinetische Energie eines Körpers betrachtet werden. Dazu werden die Werte in Bewegungsrichtung herangezogen, da allein sie zu einer Geschwindigkeitszunahme führen. Aus Gleichung (6.07) errechnet sich die Kraft, die für die Beschleunigung eines Körpers erforderlich ist gemäß

$$F = \frac{m_0 \cdot a}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \quad (6.09)$$

Die aufzuwendende Beschleunigungsarbeit ist demnach

$$W_{1,2} = \int_{v_1}^{v_2} F \cdot ds = \int_{v_1}^{v_2} \frac{m_0 \cdot a}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \cdot ds = \int_{v_1}^{v_2} \frac{m_0}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \cdot \frac{dv}{dt} ds \quad (6.10)$$

Wegen

$$v = \frac{ds}{dt} \quad (6.11)$$

folgt

$$W_{1,2} = \int_{v_1}^{v_2} \frac{m_0}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} v dv \quad (6.12)$$

und abschließend

$$W_{1,2} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Big|_{v_1}^{v_2} \quad (6.13)$$

Für $v_1 = 0$ und $v_2 = v$ folgt

$$W = E_{kin} = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) = m_0 c^2 (\gamma - 1) \quad (6.14)$$

Nach einer Reihenentwicklung des Wurzelausdrucks ergibt sich

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{v^4}{c^4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{v^6}{c^6} + \dots \quad (6.15)$$

und für $v \ll c$ erhält man daraus die klassische Formel für die kinetische Energie

$$E_{kin} \cong \frac{m_0}{2} v^2 \quad (6.16)$$

Die Gleichung (6.14) wurde von A. Einstein bereits im Jahr 1905 abgeleitet [22]. Die enthält implizit die erstmalige Darstellung der Äquivalenz von Masse und Energie und führt allgemein zu

$$E = mc^2 \quad (6.17)$$

Sie ist damit sicher die bekannteste Formel der modernen Physik.

6.2 Federparadoxon

Im Folgenden soll untersucht werden, wie sich Systeme mit einer einfachen Spiralfeder und einer daran gekoppelten Masse verhalten, wenn Versuche im Ruhezustand sowie bei erhöhter Geschwindigkeit durchgeführt werden. Hierzu werden zunächst 3 verschiedene Versuchsanordnungen untersucht und anschließend mit einer Energiebetrachtung bewertet.

6.2.1 Einfache Auslenkung einer Feder

Die einfachste Möglichkeit zur statischen Auslenkung einer Spiralfeder (ohne Schwingung) ist die Belastung mit einem Gewicht. Dieses Verfahren ist jedoch für eine Betrachtung innerhalb der speziellen Relativitätstheorie nicht geeignet, da die Auslenkung durch die Gravitationskonstante und damit durch die Masse der Erde bestimmt wird. Hierdurch wird eine Auswertung unmöglich gemacht. An dieser Stelle wäre demnach ein Ansatz der allgemeinen Relativitätstheorie erforderlich.

Aus diesem Grunde muss ein anderes Verfahren zur Auslenkung genommen werden. Hierzu wird ein Rückstoßantrieb gewählt, bei dem durch gleichmäßig ausströmendes Gas eine konstante Kraft auf die Feder ausgeübt wird. Auf diese Weise kann dann die Federkonstante k aus der Beziehung

$$F = k \cdot s \quad (6.20)$$

ermittelt werden. Hierbei ist F der Betrag der aufzubringenden Kraft und s der des Auslenkungswegs. Wird dieser Versuchsaufbau in Bewegung versetzt und dabei die Feder quer zum Beobachter positioniert, so muss von einem ruhenden Beobachter aus betrachtet aufgrund des Relativitätsprinzips die gleiche Auslenkung auftreten. Für den bewegten Versuchsteilnehmer ergibt sich dabei die gleiche Federkonstante wie zuvor. Der ruhende Beobachter stellt jedoch aufgrund der Zeitdilatation sowie der relativistischen Massenzunahme folgende Unterschiede fest:

1. Die Menge des ausströmenden Gases pro Zeiteinheit ist um den Faktor γ verkleinert.
2. Die Masse der einzelnen Gasmoleküle ist um den Faktor γ vergrößert.
3. Die Ausströmgeschwindigkeit der Gasmoleküle in Querrichtung (verglichen mit der Bewegungsrichtung) ist um den Faktor γ verkleinert.

Zu Punkt 3 ist auszuführen, dass die Gesamtgeschwindigkeit eines austretenden Gasmoleküls genau gleich ist wie im unbewegten Zustand. Dies ist deswegen der Fall, weil der Weg sich um den Faktor γ verlängert aber um den Winkel $\alpha = \arctan v/c$ von der Querrichtung abweicht. Aus dem gleichen Grund ist auch ein Lichtstrahl aus Sicht eines unbewegten Beobachters länger zu einem quer liegenden Ziel unterwegs. Die Querkomponente der Geschwindigkeit betrifft dies jedoch nicht und diese ist daher um den Faktor γ verkleinert. Diese Zusammenhänge müssen sich ergeben, damit der bewegte Beobachter die gleichen Gegebenheiten misst wie im unbewegten Zustand. In Summe führen diese Gegebenheiten zu der Beziehung

$$k = \gamma \cdot k' \quad (6.21)$$

Dies bedeutet, dass die Federkonstante im bewegten System um den Faktor γ kleiner ist als im unbewegten System. Dieser zunächst überraschende Sachverhalt ist erforderlich, damit auch bei anderen Versuchsanordnungen keine Widersprüche auftreten. Dies wird im Folgenden gezeigt.

6.2.2 Rotation

Die Auslenkung der Feder kann statt mittels Rückstoßes auch mit einer Drehbewegung vorgenommen werden. Zunächst wird im ruhenden System der Wert für die Umfangsgeschwindigkeit und abhängig davon die Auslenkung der Feder und damit die Kraft gemessen. Wird dieser Versuchsaufbau bei höherer Geschwindigkeit (wieder mit einer Ausrichtung quer zur Bewegungsrichtung) erneut geprüft, so ergibt sich für die Zentrifugalkraft

$$F'_z = m' \cdot \frac{v'^2}{r} = \frac{F_z}{\gamma} \quad (6.22)$$

Ursache für den Unterschied zum ruhenden System ist der Umstand, dass die Umfangsgeschwindigkeit v in der Beziehung der Zentrifugalkraft quadratisch auftritt. Da diese für den ruhenden Beobachter geringer ist und die Masse m sich entsprechend erhöht ergibt sich die abgeleitete Beziehung.

6.2.3 Harmonische Schwingung

Ein vergleichbarer Sachverhalt ergibt sich, wenn die Feder eine Schwingbewegung ausführt. Hier gilt die Differentialgleichung

$$\ddot{x} + \omega_0^2 \cdot x = 0 \quad (6.23)$$

mit

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad (6.24)$$

und

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (6.25)$$

wobei ω_0 die Eigenkreisfrequenz und T_0 die Schwingungsdauer darstellen. Wird dieser Versuchsaufbau in Bewegung versetzt (wieder quer zur Bewegungsrichtung), so muss die Schwingungsdauer aufgrund der Zeitdilatation um den Faktor γ abnehmen. Dies führt dann zu der folgenden Beziehung

$$T'_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m'}{k'}} = 2\pi \sqrt{\frac{\gamma^2 \cdot m}{k}} = \gamma \cdot T_0 \quad (6.26)$$

Auch hier wird also wieder die Verringerung der Federkonstante benötigt, um das Relativitätsprinzip zu gewährleisten.

6.2.4 Literaturvergleich

In der Literatur werden keine (dem Autor bekannten) Varianten dieser Experimente diskutiert. Es gibt jedoch bei der Interpretation des von G. N. Lewis und R. C. Tolman

formulierten Experiments eines „gebrochenen Hebels“ (das als mechanische Variante des Trouton-Noble Experiments aufgefasst werden kann) eine vergleichbare, von P. S. Epstein diskutierte Situation [43]. Basierend auf den generellen Ausführungen von A. Sommerfeld [44] formulierte er die folgenden Beziehungen

$$f_x = f'_x \quad f_y = \frac{f'_y}{\gamma} \quad (6.27)$$

wobei f_x und f_y die Komponenten der „Newtonschen Kraft“ sind. Diese Darstellung erklärt die für die Federn gefundenen Zusammenhänge durch das Absinken der Kraft in Querrichtung bei Betrachtung durch einen ruhenden Beobachter.

6.2.5 Energiebetrachtung

Aufgrund dieser Zusammenhänge tritt jedoch ein anderer Effekt ein, der zu einem scheinbaren Widerspruch führt. Betrachtet man die Spannenergie einer Feder

$$E_{pot} = \int_0^s F(s) ds = \int_0^s k \cdot s \, ds \quad (6.28)$$

so wird sofort klar, dass diese linear von der für das Spannen erforderlichen Kraft bzw. der Federkonstanten abhängt. Bewertet man die zuvor diskutierten Beispiele so würde dies bedeuten, dass die Spannenergie einer Feder mit steigender Systemgeschwindigkeit abnimmt. Dies stellt aber einen Verstoß gegen das Prinzip der Energieerhaltung dar. Würde man eine gespannte Feder beschleunigen und dann lösen, so würde der ruhende Beobachter einen geringeren Energieinhalt messen als zuvor eingebracht worden ist. Umgekehrt hätte eine im bewegten System gespannte Feder nach einer Abbremsung eine höhere Energie.

Zur Auflösung des Paradoxons soll zunächst eine weitere Energiebetrachtung durchgeführt werden. Dazu wird hier die Gesamtenergie einer Masse betrachtet, die sich mit der Geschwindigkeit v_1 bewegt. Diese ist gemäß der bekannten Ableitung aus Kap. 6.1

$$E_1 = \gamma_1 m_0 c^2 \quad (6.29)$$

Es wird nun der Fall untersucht, dass die Masse quer dazu gleichmäßig mit der für den bewegten Beobachter gemessenen Geschwindigkeit v_2 bewegt wird. Für den unbewegten Beobachter muss sich dann wegen der Zeitdilatation ein Wert von

$$v'_2 = \frac{v_2}{\gamma_1} \quad (6.30)$$

für die Geschwindigkeit einstellen. Die relativistische Geschwindigkeitsaddition (vgl. Kap. 4.1, Gl. (4.20), $\alpha = 90^\circ$) führt dann zu

$$v_T = \sqrt{\left(\frac{v_1}{c}\right)^2 + \left(\frac{v_2}{\gamma_1 c}\right)^2 - \left(\frac{v_1 v_2}{\gamma_1 c^2}\right)^2} \quad (6.31)$$

Die Energie dieser Masse ist

$$E_T = \gamma_T m_0 c^2 \quad (6.32)$$

Betrachtet man nun die Differenz der beiden Energien so ergibt sich

$$\Delta E = \gamma_T m_0 c^2 - \gamma_1 m_0 c^2 \quad (6.33)$$

mit

$$\Delta E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_T}{c}\right)^2}} - \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_1}{c}\right)^2}} \quad (6.34)$$

Für $v_1, v_2 \ll c$ lässt sich der Ausdruck in eine Taylorreihe entwickeln und nach dem Einsetzen von v_T folgt

$$\begin{aligned} \Delta E &\cong \left[1 + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{v_1}{c} \right)^2 + \left(\frac{v_2}{\gamma_1 c} \right)^2 - \left(\frac{v_1 v_2}{\gamma_1 c^2} \right)^2 \right) - \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{v_1}{c} \right)^2 \right) \right] m_0 c^2 \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{v_2}{\gamma_1 c} \right)^2 - \left(\frac{v_1 v_2}{\gamma_1 c^2} \right)^2 \right] m_0 c^2 \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{v_2}{\gamma_1 c} \right)^2 \left(1 - \left(\frac{v_1}{c} \right)^2 \right) \right] m_0 c^2 = \frac{1}{2} m_0 v_2^2 \end{aligned} \quad (6.35)$$

Dies ist genau die Beziehung für die kinetische Energie eines Körpers im nichtrelativistischen Zustand. Die Energiebilanz ist also bei dieser Betrachtung erhalten. Die Widersprüche bei der Energiebetrachtung der Feder rühren daher, dass die Kraft eine gerichtete Größe ist. Es entsteht die eigenartige Situation, dass Kraft und Beschleunigung nicht die gleiche Richtung haben. Dies wurde bereits von P. S. Epstein im Jahre 1911 dargestellt [43]. Obwohl hier - dem damaligen Kenntnisstand entsprechend - der Masse ein Tensor-Charakter unterstellt wurde und die in Kap 6.1 dargestellten Beziehungen für die Kräfte in Bewegungsrichtung und quer dazu noch nicht bekannt waren, ergibt sich damit die Lösung für dieses Paradoxon.

6.3 Relativistischer elastischer Stoß

Eine weitere nichtlineare Betrachtung ist für den relativistischen elastischen Stoß möglich. Dieser wird bei einer Untersuchung von makroskopisch ausgedehnten Körpern sicher keine Rolle spielen, da diese bei den erforderlichen Geschwindigkeitsunterschieden zerstört würden. Betrachtet man jedoch das Verhalten von Elementarteilchen z. B. in Beschleunigern so ist es eine interessante Fragestellung, wie deren Verhalten aus der Sicht unterschiedlich bewegter Beobachter gesehen wird.

Die Grundlage zur Berechnung liefern – wie auch im klassischen nichtrelativistischen Fall – die Erhaltungssätze für Impuls und Energie. Die Beziehungen für Impuls und Energie lauten

$$\text{Rel. Impuls:} \quad \vec{p} = \gamma m \vec{v} \quad (6.40)$$

$$\text{Rel. kinetische Energie:} \quad E = (\gamma - 1) m c^2 \quad (6.41)$$

6.3 Relativistischer elastischer Stoß

Wird das Beispiel betrachtet, dass 2 Massen zentral zusammenstoßen, so kann beim Impulssatz auf die vektorielle Darstellung verzichtet werden und die Erhaltungssätze lauten

$$m_1\gamma_1v_1 + m_2\gamma_2v_2 = m_1\gamma_3v_3 + m_2\gamma_4v_4 \quad (6.42)$$

$$(\gamma_1 - 1)m_1c^2 + (\gamma_2 - 1)m_2c^2 = (\gamma_3 - 1)m_1c^2 + (\gamma_4 - 1)m_2c^2 \quad (6.43)$$

wobei v_1 und v_2 die Geschwindigkeiten vor dem Zusammenstoß und v_3 und v_4 die danach sind. Daraus ergibt sich

$$p = m_1\gamma_1v_1 + m_2\gamma_2v_2 = m_1\gamma_3v_3 + m_2\gamma_4v_4 \quad (6.44)$$

und

$$\frac{E_0}{c^2} = (\gamma_1 - 1)m_1 + (\gamma_2 - 1)m_2 = (\gamma_3 - 1)m_1 + (\gamma_4 - 1)m_2 \quad (6.45)$$

Die Ermittlung der Werte für v_3 und v_4 ist nicht mehr in geschlossener analytischer Form möglich, sondern es muss eine Näherungslösung gesucht werden. Hierfür wird ein Ansatz mit dem Verfahren der Bisektion gewählt. Ein Beispiel für die hierzu erforderlichen Berechnungen ist in Anlage A zusammengestellt.

Die Berechnung des nichtrelativistischen Grenzfalles erfolgt über die Modifikation der Impulsgleichung Gl. (6.44)

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v_3 + m_2v_4 \quad (6.46)$$

bei der die Ausdrücke für γ entfallen, sowie durch Nutzung der Näherungsformel

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \dots \quad (6.47)$$

für $v \ll c$ und Einsetzen in die Energiegleichung Gl. (6.45), für die sich dann

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_3^2 + \frac{1}{2}m_2v_4^2 \quad (6.48)$$

ergibt. Werden die Gl. (6.46) und Gl. (6.48) geeignet umgeformt so folgt

$$m_1(v_1 - v_3) = m_2(v_4 - v_2) \quad (6.49)$$

und

$$m_1(v_1 - v_3)(v_1 + v_3) = m_2(v_4 - v_2)(v_4 + v_2) \quad (6.50)$$

Nach Division beider Gleichungen ergibt sich sofort

$$v_1 + v_3 = v_4 + v_2 \quad (6.51)$$

und nach Einsetzen in Gl. (6.49) lassen sich daraus auf einfache Weise die klassischen Formeln für den zentralen Stoß ableiten

$$v_3 = 2 \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2} - v_1 \quad (6.52)$$

und

$$v_4 = 2 \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} - v_2 \quad (6.53)$$

Es handelt sich hierbei offensichtlich um einfache geschlossene Lösungen und es sind daher keine numerischen Berechnungen erforderlich.

Es bleibt noch die Frage zu klären, wie sich die Sachverhalte aus Sicht verschieden bewegter Beobachter verhalten. Zu diesem Zweck wird die relativistische Geschwindigkeitsaddition für die Situation vor und nach dem Stoß betrachtet. Dazu werden in Anlage A neben der Ermittlung der Werte von v_3 und v_4 ebenfalls die Gleichungen für die relativistische Geschwindigkeitsaddition gemäß den folgenden Beziehungen berechnet, die dann verglichen werden können:

$$v_T(v_1, v_2) = \frac{v_1 - v_2}{1 - \frac{v_1 v_2}{c^2}} \quad (6.54)$$

$$v_T(v_4, v_3) = \frac{v_4 - v_3}{1 - \frac{v_4 v_3}{c^2}} \quad (6.55)$$

Für einen Vergleich zwischen den auftretenden Abweichungen der beiden Ergebnisse wird sinnvollerweise der Quotient betrachtet und dann wegen der geringen Abweichungen mit 1 subtrahiert

$$\delta_v = \frac{v_T(v_1, v_2)}{v_T(v_4, v_3)} - 1 \quad (6.56)$$

In Abb. 6.1 sind die Ergebnisse für Geschwindigkeiten v_1/c von 0,0001 bis 0,999 für Massenverhältnisse $m_1:m_2$ von 1:2 und 2:1 sowie für die Startbedingungen $v_2 = 0$ und $v_1 = -v_2$ wiedergegeben. Um eine Vergleichbarkeit zwischen den untersuchten Geschwindigkeiten herzustellen, wurden Werte für die Verhältnisse von v_3/v_1 und v_4/v_1 ermittelt und darüber hinaus auch grafisch dargestellt. Die Graphen laufen asymptotisch auf die gemäß den Gleichungen Gl. (6.52) und Gl. (6.53) berechneten Werte für den nichtrelativistischen Fall zu, die ebenfalls in die Diagramme eingetragen wurden. Die Berechnungen von δ_v machen deutlich, dass alle Beobachter unabhängig vom Bewegungszustand zum selben Ergebnis kommen. Dies entspricht damit dem gleichen Ergebnis wie bei nicht relativistischer Betrachtung (vgl. Gl. (6.52) und Gl. (6.53)).

Die aufgeführten Fehlergrößen δ_v zeigen bei hohen Geschwindigkeiten keine Abweichungen, was sich jedoch bei niedrigen Werten ändert. Dies wird durch den zunehmenden Einfluss von Rundungsfehlern bei der Berechnung kleiner Beträge verursacht, da bei üblichen Kalkulationsprogrammen (z. B. Microsoft Excel) die Genauigkeit auf 15 Stellen limitiert ist. Bei einem Vergleich zwischen Tabellenkalkulation und VBA zeigt sich außerdem, dass geringfügige Unterschiede im Ergebnis der Berechnungen auftreten können. Dies kann sich bei der Angabe zu δ_v bemerkbar machen, wobei aber die prinzipielle Aussage erhalten bleibt. Die hier dargestellten Werte entstammen einer Tabellenkalkulation. Die Frage zur Genauigkeit ist darüber hinaus generell wichtig für numerische Berechnungen; hierzu ist in Anlage D eine umfassende Bewertung verschiedener Ansätze (für die Rekursion, dem Verfahren nach Newton und der Bisektion) enthalten.

6.3 Relativistischer elastischer Stoß

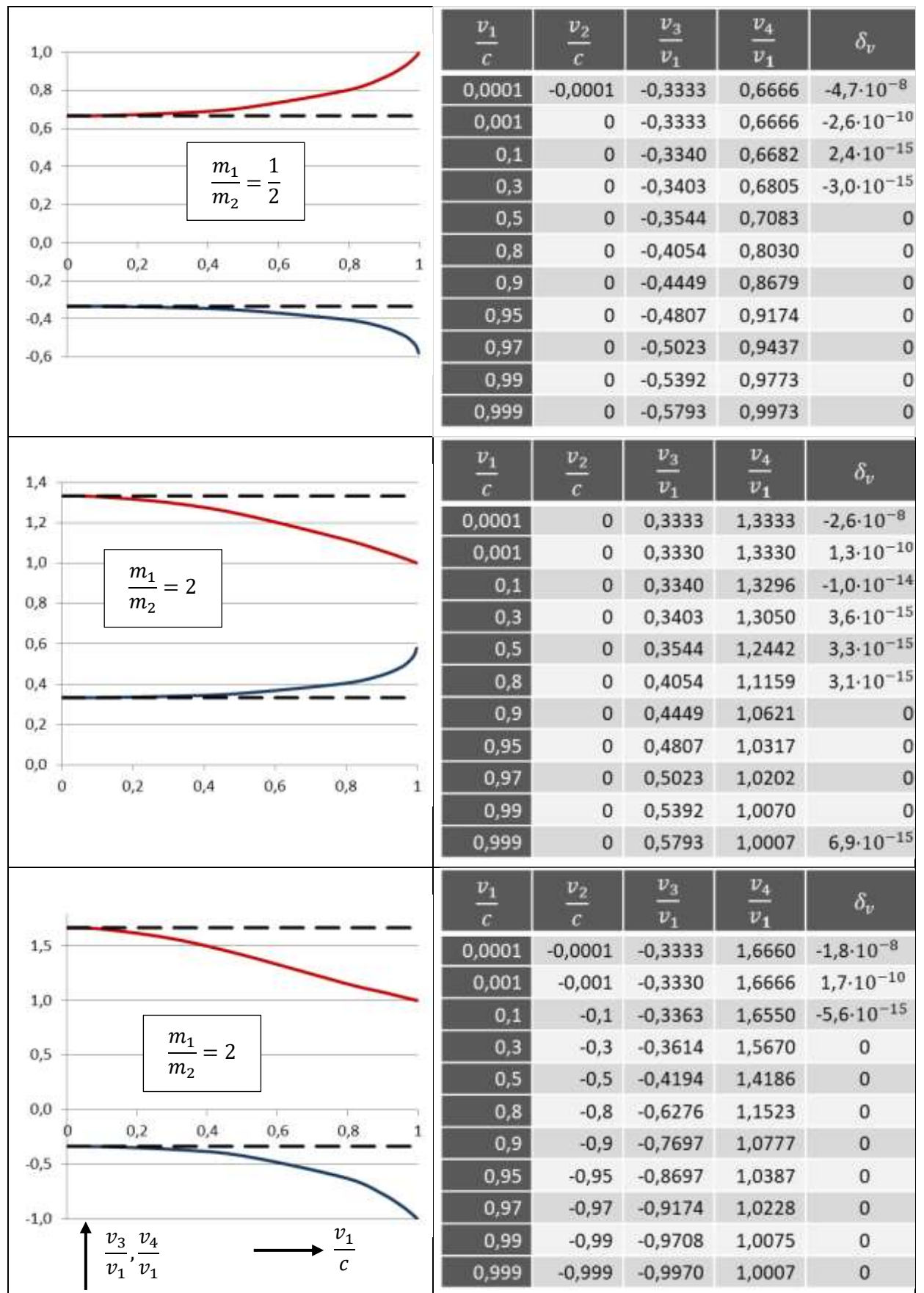


Abb. 6.1: Relativistischer elastischer Stoß für $0,0001 < v_1/c < 0,999$. Geschwindigkeitsverhältnis v_3/v_1 (blau) v_4/v_1 (rot). Fehlerbereich δ_v (Definition vgl. Text). Nichtrelativistischer Grenzfall: gestrichelte Linie

Zusammenfassend ist festzuhalten, dass beim elastischen relativistischen Stoß keine Effekte auftreten können, die Messungen zur Identifizierung eines absolut ruhenden Systems gestatten. Es gibt jedoch noch in neuerer Zeit (Jahr 2017) Versuche, mittels Präzisionsmessungen von Partikelmassen (hier: Elektronen) solche Effekte nachzuweisen [45]. Gemäß den hier dargestellten Ergebnissen können diese Versuche aber nicht zum Erfolg führen.

6.4 Signalaustausch während und nach Beschleunigungen

In diesem Kapitel wird untersucht, wie sich beschleunigte Systeme in relativistischen Situationen verhalten und welche Messergebnisse sich dabei für andere, nicht beschleunigte Beobachter ergeben. Die Beschleunigung wird dabei nicht von außen – z. B. durch ein elektromagnetisches Feld auf eine Ladung – hervorgerufen, wie dies von H. A. Lorentz untersucht wurde (vgl. Kap. 6.1), sondern erfolgt durch Raketenrückstoß.

Zunächst wird die einfache Situation betrachtet, bei der das zu untersuchende System einer konstanten Beschleunigung ausgesetzt ist, wobei Änderungen der Masse durch Ausstoß von Treibgasen zunächst unberücksichtigt bleiben. Die Ergebnisse lassen sich mittels analytischer und numerischer Verfahren bestimmen. Anschließend wird in einem weiterführenden Ansatz die Berücksichtigung der Abnahme der Raketenmasse bei der Beschleunigung ergänzt. Wird beim Antrieb eine proportionale Änderung der Ausstoßmasse mit der verbleibenden Raketenmasse unterstellt, kommt es zu einer gleichbleibenden Beschleunigung. Dagegen führt eine konstante Massenabnahme pro Zeiteinheit zu steigenden Beschleunigungswerten. Diese Berechnungen können vollständig (d. h. einschließlich Beschleunigung und zurückgelegtem Weg) nur noch numerisch durchgeführt werden; ein entsprechendes Programm und damit ermittelte Ergebnisse sind in der Anlage dargestellt. Abschließend wird die mit klassischer und relativistischer Raketenformel berechenbare Endgeschwindigkeit einer Rakete ermittelt und die Übereinstimmung der Ergebnisse gezeigt.

6.4.1 Signalaustausch bei Systemen mit konstanter Beschleunigung

Es wird der Fall betrachtet, dass eine Rakete gleichförmig beschleunigt und dabei aus anderen Inertialsystemen beobachtet wird. Während des Beschleunigungsvorgangs werden von einem Beobachter S innerhalb der Rakete in regelmäßigen Abständen von Δt_S Signale ausgesendet. An dem Versuch nimmt außerdem Beobachter A teil, der sich zu Beginn der Beschleunigung mit gleicher Geschwindigkeit wie S bewegt, in einer weiterführenden Betrachtung auch Beobachter B mit einer hierzu beliebigen Geschwindigkeit.

Zunächst wird die Beschleunigung der Rakete aus Sicht des Beobachters A untersucht. Eine analytische Berechnung wird erschwert durch die Tatsache, dass die relativistische Geschwindigkeitsaddition keine lineare Beziehung darstellt. Während der Beschleunigung wird für die aktuelle Geschwindigkeit v_A die Geschwindigkeitsänderung dv_A (aus Sicht von A) beschrieben durch

$$v_A + dv_A = \frac{v_A + dv_S}{1 + \frac{v_A \cdot dv_S}{c^2}} \quad (6.60)$$

wobei dv_S die Geschwindigkeitsänderung aus Sicht des bewegten Systems S darstellt. Eine Taylorentwicklung führt zu

6.4 Signalaustausch während und nach Beschleunigungen

$$v_A + dv_A = v_A + dv_S \left(1 - \frac{v_A^2}{c^2}\right) + (dv_S)^2 \left(\frac{v_A^3 - v_A \cdot c^2}{c^4}\right) + \dots \quad (6.61)$$

Bei differentieller Betrachtung für $dv_S \rightarrow 0$ verschwinden Werte von $(dv_S)^2$ und höheren Potenzen. Gl. (6.61) erhält damit die Form

$$dv_A = dv_S \left(1 - \frac{v_A^2}{c^2}\right) \quad (6.62)$$

Es werden nun für beide Systeme die jeweils geltenden Beschleunigungen betrachtet

$$a_S = \frac{dv_S}{dt_S} \quad a_A = \frac{dv_A}{dt_A} \quad (6.63)$$

Außerdem gilt

$$dt_S = dt_A \cdot \gamma = \frac{dt_A}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_A}{c}\right)^2}} \quad (6.64)$$

Daraus folgt

$$a_A = \frac{dv_A}{dt_A} = \frac{dv_S}{dt_S} \left(1 - \frac{v_A^2}{c^2}\right)^{3/2} = a_S \left(1 - \frac{v_A^2}{c^2}\right)^{3/2} = \frac{a_S}{\gamma^3} \quad (6.65)$$

Zwischen a_A und a_S zeigt sich also der gleiche Faktor γ^3 , wie er bei der Ermittlung der Zusammenhänge für die auftretenden Kräfte bei relativistischer Massenzunahme abgeleitet wurde (vgl. Kap. 6.1).

In der Folge sollen nun die Gesetzmäßigkeiten zwischen den subjektiv beobachteten Zeiten, Geschwindigkeiten und Entfernungen für ruhende und bewegte Beobachter bestimmt werden. Dazu wird zunächst die Geschwindigkeit betrachtet. Aus Gl. (6.65) ergibt sich unmittelbar

$$dt_A = \frac{1}{a_S} \left(1 - \frac{v_A^2}{c^2}\right)^{-3/2} dv_A \quad (6.66)$$

Wird für a_S ein konstanter Wert vorausgesetzt und Gl. (6.66) integriert so ergibt sich

$$t_A = \frac{v_A}{a_S} \left(1 - \frac{v_A^2}{c^2}\right)^{-1/2} + C = \frac{v_A \cdot \gamma(v_A)}{a_S} + C \quad (6.67)$$

Werden konkrete Werte eingesetzt (z. B. Zeit läuft von 0 bis t_A) so verschwindet die Integrationskonstante C . Diese Gleichung beschreibt – bei subjektiv konstanter Beschleunigung der Rakete – die Abhängigkeit zwischen Zeit und Geschwindigkeit aus Sicht von A. Bei gegebener Geschwindigkeit lässt sich direkt die Zeit ermitteln, im umgekehrten Fall muss bei Verwendung der Gleichung ein numerisches Verfahren zur Bestimmung von v_A benutzt werden. Um dies zu vermeiden, lässt sich die Gl. (6.67) jedoch erweitern und umformen über

$$\left(\frac{a_S \cdot t_A}{c}\right)^2 = \left(\frac{v_A \cdot \gamma(v_A)}{c}\right)^2 = \frac{\frac{v_A^2}{c^2} + 1 - 1}{1 - \frac{v_A^2}{c^2}} = \frac{1}{1 - \frac{v_A^2}{c^2}} - 1 \quad (6.68)$$

Nach v_A aufgelöst ergibt das

$$v_A = \frac{a_S \cdot t_A}{\sqrt{1 + \left(\frac{a_S \cdot t_A}{c}\right)^2}} \quad (6.69)$$

Diese Darstellung findet sich auch in der Literatur, wobei sowohl Ansätze ähnlich dem hiergewählten verwendet werden [32] als auch unter Nutzung der Rapidität [91]. [Anmerkung: die Rapidität θ beschreibt ein Konzept, bei dem die Geschwindigkeiten nach dem Galilei-Prinzip aufaddiert werden; der Zusammenhang mit der relativistischen Geschwindigkeit ist $\theta = \operatorname{arctanh}(v/c)$]. Die Gleichungen (6.67) und (6.69) sind gleichwertig und können abhängig von den Berechnungsanforderungen benutzt werden.

Zur Berechnung der in der Rakete subjektiv ablaufenden Zeit werden die Gleichungen (6.64) und (6.66) kombiniert und es ergibt sich die Beziehung

$$dt_S = \frac{1}{a_S} \left(1 - \frac{v_A^2}{c^2}\right)^{-1} dv_A \quad (6.70)$$

Die Integration führt zu

$$t_S = \frac{c}{a_S} \operatorname{arctanh}\left(\frac{v_A}{c}\right) + C \quad (6.71)$$

Zur direkten Ermittlung der Abhängigkeit von t_A anstatt v_A kann die Gl. (6.69) in (6.71) eingesetzt werden.

Die zurückgelegte Entfernung x_A lässt sich unter Nutzung von Gl. (6.66) berechnen mit

$$dx_A = v_A dt_A = \frac{1}{a_S} \left(1 - \frac{v_A^2}{c^2}\right)^{-3/2} dv_A \quad (6.72)$$

Die Integration ergibt

$$x_A = \frac{c^2}{a_S} \left(1 - \frac{v_A^2}{c^2}\right)^{-1/2} + C \quad (6.73)$$

Im Gegensatz zu den vorherigen Fällen muss hier die Integrationskonstante bestimmt werden. Dies erfolgt über Nutzung der Randbedingung $x_A = 0$ für die Geschwindigkeit $v_A = 0$. Eingesetzt in Gl. (6.73) und aufgelöst nach C führt dies zu

$$0 = \frac{c^2}{a_S} (1 - 0)^{-1/2} + C \Rightarrow C = -\frac{c^2}{a_S}$$

und eingesetzt in Gl. (6.73) entsteht die endgültige Form

$$x_A = \frac{c^2}{a_S} \left\{ \left(1 - \frac{v_A^2}{c^2}\right)^{-1/2} - 1 \right\} = \frac{c^2}{a_S} (\gamma - 1) \quad (6.74)$$

Auch hier kann wieder alternativ die Beziehung zwischen v_A und t_A aus Gleichung (6.69) eingesetzt werden, um eine direkte Abhängigkeit von t_A zu erhalten.

Die Gleichung (6.74) weist die Besonderheit auf, dass für kleine Werte von v_A die Ergebnisse sehr ungenau werden können. Der Wert von γ nähert sich dabei 1; da in der Formel

aber der Wert 1 abgezogen wird können bei üblicher Rechengenauigkeit größere Fehler entstehen. Es ist hier empfehlenswert eine Taylorentwicklung zu nutzen, bei der diese Probleme nicht auftreten. Die Anlage B enthält unter B.3 eine Ableitung und es ist dargestellt, unter welchen Randbedingungen Gl. (6.74) oder Taylor-Verfahren genauer sind.

Darüber hinaus wird in dieser Anlage auch ein numerisches Verfahren vorgestellt, bei dem die Nutzung der relativistischen Geschwindigkeitsaddition mit hinreichend kleinen Schritten zu den gleichen Ergebnissen führt. Ein analytisches Verfahren ist zwar einfacher zu nutzen, würde aber bei Modifikationen – wie z. B. der Änderung der Beschleunigung während des Versuches – zu Problemen führen. Bei numerischen Verfahren lässt sich eine solche Situation dagegen einfach implementieren. Dies wird deutlich bei der im nächsten Kapitel beschriebenen Situation, bei der der Austritt eines Treibgases einer Rakete und die entstehenden Einflüsse auf das System genau betrachtet werden.

In der Folge soll nun gezeigt werden, dass auf Basis dieser einfachen Zusammenhänge keine Widersprüche bezüglich der Feststellungen von Beobachtern auftreten, die sich mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten relativ zum Ausgangspunkt beim Start der Beschleunigung bewegen. Hierzu wird lediglich vorausgesetzt, dass aus der Rakete in subjektiv gleichen Zeitabständen Signale ausgesendet werden, die von den Beobachtern A und B aufgefangen werden. Die mögliche Lage dieser Beobachter ist in nachfolgendem Bild dargestellt.

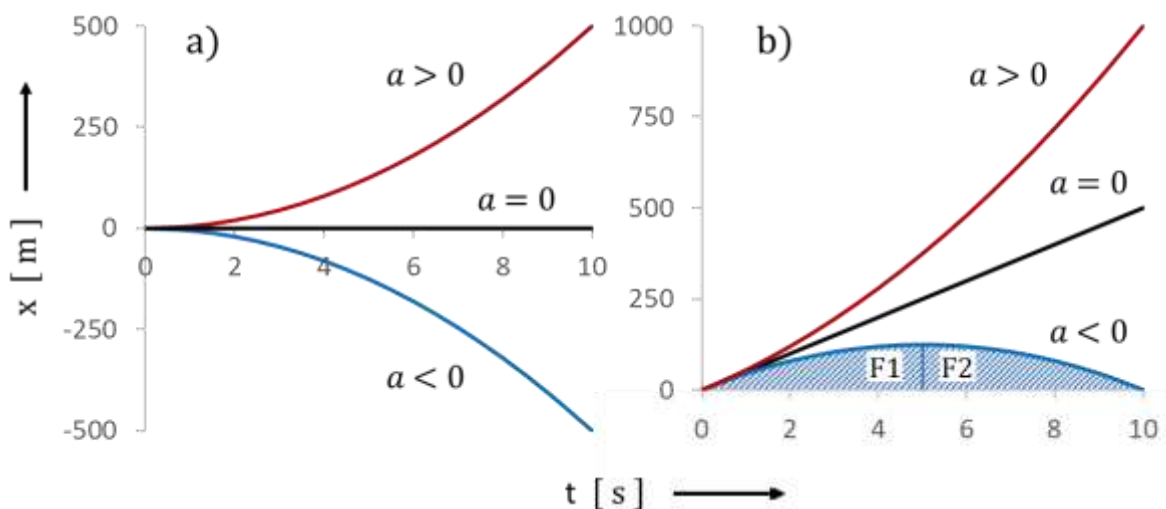


Abb. 6.2 Vergleich unterschiedlicher Beschleunigungszustände für die Beispiele:
 $a = 10 \text{ m/s}^2$, $a = 0$ und $a = -10 \text{ m/s}^2$
a) $v_0 = 0$, b) $v_0 = 50 \text{ m/s}$

Beobachter B ist in allen Fällen relativ zur Diagrammdarstellung in Ruhe (d. h. aus Sicht von A und S bewegt er sich relativ zu ihnen bei Versuchsbeginn mit der Geschwindigkeit v_0), während A sich auf der Linie $a = 0$ bewegt. Im Teildiagramm a) mit $v_0 = 0$ fallen also die Ergebnisse für A und B zusammen, während sich in b) Teilnehmer A mit konstanter Geschwindigkeit v_0 von B entfernt. Ziel der nachfolgenden Berechnungen ist es zu zeigen, dass die empfangenen Signalabstände von A im Teil a) und auch b) aus Sicht von B unter Nutzung der Lorentz-Gleichungen identisch sind. Das Relativitätsprinzip ist gültig, wenn die subjektiv gemessenen Zeiten unabhängig von der Geschwindigkeit der Beobachter sind.

6. Relationen für Masse, Impuls, Kraft und Energie

Um dieses nachzuweisen, wird in Abb. 6.3 eine Situation betrachtet, bei der in Teilbild a) die Rakete den Beobachter B passiert (blaue Linie im x/t -Diagramm), abbremst und sich anschließend wieder annähert. In Teilbild b) startet die Rakete aus einer Ruheposition und wird gleichmäßig beschleunigt. In diesem Fall ist noch der Verlauf eines gleichmäßig mit der Geschwindigkeit v_0 bewegten zusätzlichen Versuchsteilnehmers dargestellt (blaue Linie). Zur besseren Unterscheidbarkeit der Ergebnisse wurden die Referenzpunkte in Teilbild a) mit P und in b) mit Q und R gekennzeichnet.

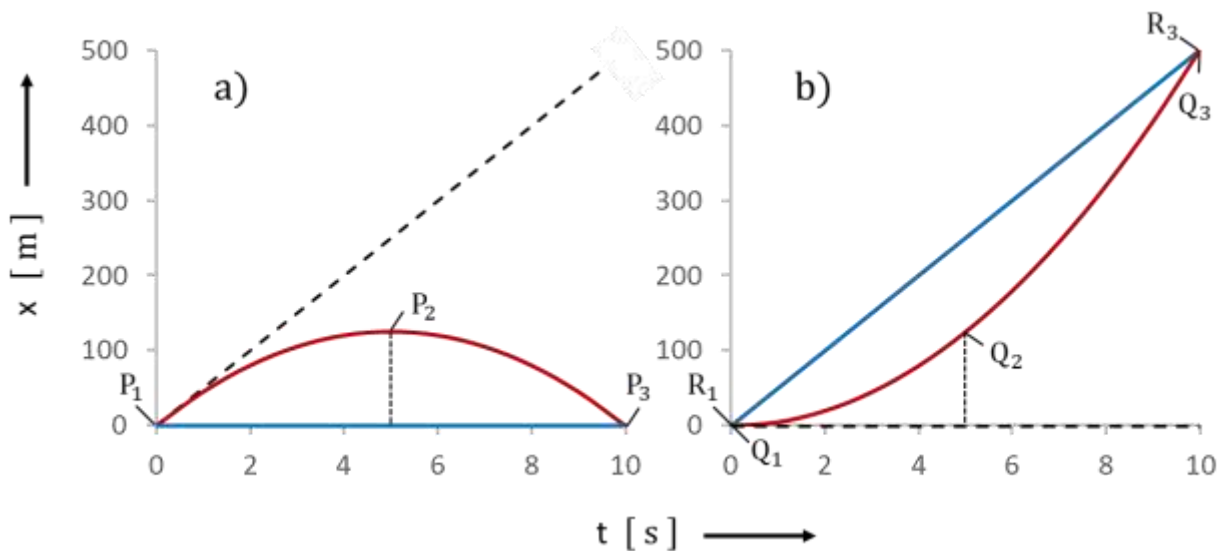


Abb. 6.3 Gleichartige Beschleunigungen aus Sicht von verschiedenen Beobachtern
a) $v_0 = 50 \text{ m/s}$, $a_s = -10 \text{ m/s}^2$ b) $v_0 = 0$, $a_s = 10 \text{ m/s}^2$

Mit den hier im Diagramm gewählten sehr kleinen Werten für v_0 lassen sich keine nennenswerten Abweichungen zwischen relativistischer und nicht relativistischer Betrachtung aufzeigen. Daher wurden Berechnungen durchgeführt, die als Basis eine Systemgeschwindigkeit von 369 km/s aufweisen. Wie bereits in verschiedenen anderen Fällen dargestellt, ist dies die Geschwindigkeit, mit der sich unser Sonnensystem zur gleichmäßigen kosmischen Hintergrundstrahlung bewegt und damit von großem Interesse für evtl. durchzuführende Versuche ist. Es bleibt noch die Frage zu klären, wie groß der Unterschied im vorliegenden Fall zwischen relativistischer und nicht relativistischer Betrachtung ist. Um dies zu zeigen, wurden in die Tabelle ebenfalls Werte für den nicht relativistischen Fall (Galilei) hinzugefügt. Diese Beziehungen sind bekanntlich gegeben durch

$$v = a \cdot t \quad (6.75)$$

$$x = \frac{1}{2} a \cdot t^2 \quad (6.76)$$

Wird angenommen, dass ein Raumschiff die Erde mit 369 km/s passiert und mit 10 m/s^2 abbremst, so würde bei nicht relativistischer Betrachtung die maximale Entfernung in einem Abstand von ca. $6,8 \cdot 10^6 \text{ km}$ erreicht (Teilbild a, Punkt P_2). Die Gesamtzeit, bis die Erde bei P_3 wieder erreicht wird, liegt bei etwa 20,5 Stunden. Die genauen Werte und auch die für eine relativistische Betrachtung berechneten Ergebnisse sind in nachfolgender Tabelle (Tab. 6.1) zusammengestellt.

6.4 Signalaustausch während und nach Beschleunigungen

In dieser Darstellung ist eine Reihe von Informationen enthalten, die im Folgenden aufgeschlüsselt werden. Dazu ist es erforderlich, die Abfolge der Berechnungen zu beachten. Zuerst wird das Teilbild a) betrachtet:

1. $P_1 \rightarrow P_2$

Es werden die Werte $t_S(P_2)$ aus Gl. (6.67), $t_A(P_2)$ aus Gl. (6.71) und $x_A(P_2)$ aus Gl. (6.74) für die Randbedingung $v_A = 369$ km/s berechnet. Die Nutzung von Gl. (6.74) ist zulässig, obwohl diese für den Fall $v_A = 0$ abgeleitet wurde; aus Symmetriegründen wird hier einfach der Fall $P_2 \rightarrow P_1$ betrachtet und auf $P_1 \rightarrow P_2$ übertragen.

2. $P_2 \rightarrow P_3$

Aus Symmetriegründen müssen die Werte von $t_S(P_3)$ und $t_N(P_3)$ doppelt so groß sein wie für (P_2) . Definitionsgemäß ist $x_A(P_3) = 0$.

Für das Teilbild b) gilt entsprechend:

1. $Q_1 \rightarrow Q_2$

Aus Symmetriegründen gilt $t_S(P_2) = t_S(Q_2)$, $t_A(P_2) = t_A(Q_2)$ und $x_A(P_2) = x_A(Q_2)$.

2. $Q_2 \rightarrow Q_3$

Hier wird die Voraussetzung genutzt, dass sich subjektiv innerhalb von unterschiedlich bewegten Inertialsystemen bei gleichen Zustandsänderungen keine Unterschiede ergeben dürfen, d. h. es wird $t_S(P_3) = t_S(Q_3)$ gesetzt (die beiden Felder sind grün und mit Pfeil gekennzeichnet). Ist diese Annahme korrekt, dürfen sich bei einem späteren Ergebnisvergleich keine Unterschiede zeigen. Zunächst wird dann der Wert für $v_A(Q_3)$ aus Gl. (6.71) berechnet, dann $t_A(Q_3)$ aus Gl. (6.67) und $x_A(Q_3)$ aus Gl. (6.74).

Pos.	Kriterium	v_A	t_S	t_A	x_A
P_1		369	0	0	0
P_2	relativ.	0	36900,0186344619	36900,0279516977	6808057,73532358
P_2	Galilei	0	36900	36900	6808050
P_3	relativ.	-369	73800,0372689239	73800,0559033954	0
P_3	Galilei	-369	73800	73800	0
Q_1		0	0	0	0
Q_2	relativ.	369	36900,0186344619	36900,0279516977	6808057,73532358
Q_2	Galilei	369	36900	36900	6808050
Q_3	relativ.	737,998881935078	73800,0372689239	73800,1118068352	27232241,2567440
Q_3	Galilei	738	73800	73800	27232200
R_3	relativ.	369	73800,0559034565	73800,1118068942	27232241,2567440
R_3	Galilei		73800	73800	27232200
δ_K			$-8,28559 \cdot 10^{-13}$	$-8,001 \cdot 10^{-13}$	

Tab. 6.1 Ergebnisse von Berechnungen für $v_0 = 369$ km/s und $a_S = -10$ m/s² (Werte P) bzw. 10 m/s² (Werte Q) für nicht relativistischen Ansatz (Galilei) und relativistisch. Punkte sind definiert gemäß Abb. 6.3.

Für eine weitere Bewertung muss noch der Fall berechnet werden, wie sich im Teilbild b) die Situation für einen linear (unbeschleunigt) bewegten Beobachter ergibt (blaue Linie). Hierfür wird die Randbedingung genutzt, dass sich beschleunigte und nicht beschleunigte Beobachter am Punkt Q_3 treffen, d. h. die Werte x_N für Q_3 und R_3 müssen in diesem Fall gleich sein (auch diese Felder sind grün und mit Pfeil gekennzeichnet). Aus

$$t_A = \frac{x_A}{v_0} \quad (6.77)$$

und

$$t_S = \frac{t_A}{\gamma} \quad (6.78)$$

lassen sich dann die Werte für t_A und t_S berechnen.

Mit den hier ermittelten Daten lässt sich ein Vergleich zwischen einzelnen Werten durchführen. Als erstes werden die Werte für t_A für den beschleunigten und nicht beschleunigten Fall an der Stelle $Q_3 = R_3$ verglichen, die definitionsgemäß gleich sein müssen, da sie jeweils vom gleichen Punkt starten und enden ($Q_1 \rightarrow Q_3$ und $R_1 \rightarrow R_3$). Die Werte sind blau gekennzeichnet. Trotz unterschiedlicher Berechnungsvorschriften führen sie zum annähernd gleichen Ergebnis, wobei die Abweichung gemäß der Berechnung für

$$\delta_{K1} = \frac{t_A(Q_3)}{t_A(R_3)} - 1 \quad (6.79)$$

ermittelt wurde. Das gleiche Verhalten tritt auf, wenn die Werte für $t_A(P_3)$ und $t_S(Q_3(L))$ verglichen werden (gelb gekennzeichnet)

$$\delta_{K2} = \frac{t_A(P_3)}{t_S(R_3)} - 1 \quad (6.80)$$

Diese müssen aus folgendem Grund gleich sein: Der ruhende Beobachter in Teilbild a) stellt fest, dass die vorbeifliegende Rakete nach gleichmäßiger negativer Beschleunigung zum Zeitpunkt t_A wieder bei ihm eintrifft. Der gleichmäßig bewegte Beobachter in Teilbild b) muss subjektiv das gleiche Verhalten feststellen. Für die Situation eines ruhenden Beobachters in Teilbild b), dargestellt durch den Verlauf der gestrichelten Linie, ist in diesem Fall der Wert für t_A höher, lässt sich aber mit einfacher Division durch γ auf den subjektiven Messwert des bewegten Systems zurückführen. Es lassen sich hierbei keine relevanten Berechnungsunterschiede feststellen.

Bei den hier gewählten Randbedingungen mit $v_A = 369 \text{ km/s}$ treten für δ_K Abweichungen von ca. $8 \cdot 10^{-13}$ auf. Werden dagegen höhere Werte für v_A gewählt wie z. B. in Tab. 6.2 mit $v_A = 0,5c$ so sind im Rahmen der Kalkulationsgenauigkeit keine Abweichungen mehr feststellbar, bei kleineren Werten für v_A steigen sie dagegen an. Dies ist bedingt durch das Auftreten kleiner Werte von γ , insbesondere in Gl. (6.74). Bei kleinen Geschwindigkeiten ist der Wert für γ nur geringfügig größer als 1; wird hiervon der Wert 1 abgezogen, können sich in Abhängigkeit von der Rechengenauigkeit großen Abweichungen ergeben. Dieser Effekt wird in Anlage B, Kap. B.3 noch genauer dargestellt und hierzu eine deutliche Verbesserung der Genauigkeit durch Nutzung einer Taylor-Entwicklung demonstriert.

Statt der hier gewählten analytischen Betrachtung können die Gesetzmäßigkeiten auch numerisch ermittelt werden. Ein Verfahren hierzu ist in Anlage B zusammengestellt. Werden hierbei die auftretenden Abweichungen betrachtet, so zeigt sich bei niedrigen Werten von v_A ein Vorteil des numerischen Verfahrens, bei höheren Geschwindigkeiten ist es umgekehrt; die Genauigkeit hängt darüber hinaus wesentlich von der Anzahl der gewählten Iterationsschritte ab. Nach Durchführung der numerischen Berechnungen zeigt sich hierbei, dass sich die subjektiv vorhandene Beschleunigung zwischen unbewegtem und bewegtem Beobachter um den Faktor γ^3 unterscheidet; im Gegensatz zum analytischen Verfahren, bei dem dies durch grundsätzliche Überlegungen bestimmt wurde, ist dies ein Ergebnis der durchgeführten Berechnungen. In der Anlage sind die Ergebnisse detailliert dargestellt.

Pos.	Kriterium	v_A	t_S	t_A	x_A
P_1		149896,229	0	0	0
P_2	relativ.	0	16467783,9204409	17308525,6327320	1390379100217,26
P_2	Galilei	0	14989622,9	14989622,9	6808050
P_3	relativ.	-149896,229	32935567,8408818	34617051,2654639	0
P_3	Galilei	-149896,229	29979245,8	29979245,8	0
Q_1		0	0	0	0
Q_2	relativ.	149896,229	16467783,9204409	17308525,6327320	1390379100217,26
Q_2	Galilei	149896,229	14989622,9	14989622,9	6808050
Q_3	relativ.	239833,96640	32935567,8408818	39972327,7333333	5991701191578,78
Q_3	Galilei	299792,458	29979245,8	29979245,8	4493775893684,09
R_3	relativ.	149896,229	34617051,2654639	39972327,7333333	5991701191578,78
R_3	Galilei	299792,458	29979245,8	29979245,8	4493775893684,09
δ_K			0	0	

Tab. 6.2 Ergebnisse von Berechnungen für $v_0 = 0,5c$ und $a_S = -10 \text{ m/s}^2$ (Werte P) bzw. $a_S = 10 \text{ m/s}^2$ (Werte Q) für nicht relativistischen Ansatz (Galilei) und relativistisch. Punkte sind definiert gemäß Abb. 6.3.

Bei einer Bewertung der gewählten Randbedingungen wird klar, dass ein solcher Raketenantrieb derzeit nicht existiert; man könnte hiermit z. B. den Mars in wenigen Tagen erreichen. Noch deutlicher wird dies, wenn eine lange Reise unter den hier gewählten Vorgaben betrachtet wird. Wird angenommen, dass ein Körper von 100 to mit 1g konstant beschleunigt die Galaxis durchquert (100.000 Lichtjahre, subjektive Zeit an Bord: ca.12 Jahre), so müsste die Ursprungsrakete, auch wenn eine optimale Umwandlung von Masse in kinetische Energie unterstellt wird, bei Abflug eine Größe von $14 \times 14 \times 14 \text{ km}^3$ aufweisen, wenn eine Treibstoffdichte von 70 kg/m^3 angenommen wird [91]. Hierbei sind noch keine Aussagen zum Abbremsen der Rakete nach der Reise oder über den Einfluss von Mikrometeoriten und Gas bezüglich eines Bremseffektes, bzw. dem Schutz der Passagiere durch zusätzlich erforderliche Massen aufgrund erforderlicher Abschirmvorrichtungen enthalten.

Trotz der offensichtlichen Unmöglichkeit einer Umsetzung im großtechnischen Maßstab sind die hier errechneten Ergebnisse aber eindeutig und zeigen auf, dass – obwohl die Einflüsse klein sind – sie bei genauer Betrachtung auch geringer Beschleunigungsphasen berücksichtigt werden müssen.

Abschließend soll noch generell die Frage zum Einfluss der Beschleunigung auf die Messungen untersucht werden. Gemäß der Allgemeinen Relativitätstheorie ist es für einen Beobachter nicht zu unterscheiden, ob er einem Beschleunigungseffekt aufgrund einer sich ändernden Geschwindigkeit oder einem Schwerfeld ausgesetzt ist. Obwohl nicht eindeutig klar ist ob auch bei Beschleunigungen eine zusätzliche (gravitative) Zeitdilatation auftritt, soll deren potenzielle Größe im Folgenden abgeschätzt werden.

Bei den hier gewählten Bedingungen mit einem Beschleunigungswert von 10 m/s^2 , der ungefähr dem Effekt der Erdanziehung von $9,81 \text{ m/s}^2$ entspricht, ergibt sich eine durch vielfache Messungen bestätigte Zeitdilatation von etwa $7 \cdot 10^{-10}$ [80]. Wird dieser Wert mit der Gesamtzeit aus Tab. 6.2 multipliziert so ergibt sich ein Effekt von $5,17 \cdot 10^{-5} \text{ s}$. Dies würde bedeuten, dass sich die errechnete Zeitdifferenz zwischen relativistischer und nicht relativistischer Betrachtung um einen Wert von 0,28% verlängert. Eine gesonderte Berücksichtigung ist daher aufgrund der geringen Abweichung nicht erforderlich.

6.4.2 Relativistischer Raketenantrieb

Es stellt sich nun die Frage, wie sich in der Realität eine Rakete verhält, die durch ausströmendes Gas angetrieben wird und dementsprechend Masse verliert. Ein Beobachter B, der diesen Vorgang aus einem anderen Inertialsystem beobachtet und für S und A bei Versuchsbeginn die Geschwindigkeit v_0 misst, wird aufgrund der Zeitdilatation und der relativistischen Massenzunahme Unterschiede zu den Messungen von S feststellen, und zwar

1. Die Menge des austretenden Gases pro Zeiteinheit ist um den Faktor $\gamma(v_0)$ geringer.
2. Die Masse der einzelnen Gasmoleküle ist um den Faktor $\gamma(v_0)$ vergrößert.
3. Die verbleibende Masse der Rakete hat sich um den Faktor $\gamma(v_0)$ vergrößert.
4. Die Ausströmgeschwindigkeit des Gases entspricht den Gegebenheiten der relativistischen Geschwindigkeitsaddition.
5. Die Signalabstände sind um den Faktor $\gamma(v_0)$ vergrößert.
6. Die Gesamtzeit für die Beschleunigung ist um den Faktor $\gamma(v_0)$ vergrößert.

Zur exakten Bestimmung der Situation müssen sämtliche Einflüsse durch diese Kriterien bezüglich der jeweiligen Reduzierung der Raketenmasse aufgrund des Gasausstoßes berechnet werden. Diese Gegebenheiten werden für Fälle mit konstantem Gasausstoß (der zu einem stetigen Ansteigen der Beschleunigung führt) und mit ständig reduziertem Gasausstoß (zur Sicherstellung einer konstanten Beschleunigung) betrachtet.

Zur Aufstellung der für diese Fragestellung relevanten Gleichungen wird der relativistische Impuls benutzt. Es wird vorab festgelegt, dass alle Funktionen, die sich auf das ausströmende Gas beziehen mit f' gekennzeichnet werden; Beziehungen, die auf die bewegte Rakete verweisen, werden dagegen ohne diese Kennzeichnung dargestellt.

Dies vorausgesetzt ergibt sich allgemein für den relativistischen Impuls einer Rakete vor dem Beginn der Beschleunigung

6.4 Signalaustausch während und nach Beschleunigungen

$$p_0 = m_0 v_0 \gamma_0 \quad (6.81)$$

wobei v_0 die Anfangsgeschwindigkeit relativ zum Bezugssystem des jeweiligen Beobachters ist. Nach dem ersten Schritt erhält man für die Rakete

$$p_1 = m_1 v_1 \gamma_1 \quad (6.82)$$

wobei die Werte für den Schritt 1 folgendermaßen berechnet werden:

1. Es wird angenommen, dass während dieses ersten Schritts aus der Rakete ein Massenanteil Δm_0 mit der Geschwindigkeit v'_0 als Gas austritt; dieses ausströmende Gas wird in der Raketentechnologie auch als „Stützmasse“ bezeichnet.
2. Der Impuls der Rakete p_1 (bezogen auf die verbleibende Masse $m_1 = m_0 - \Delta m_0$) sowie p'_1 der Stützmasse Δm_0 werden addiert und mit dem zuvor bestimmten Impuls p_0 der Rakete gleichgesetzt (Nutzung des Impulserhaltungssatzes). Daraus wird die sich ändernde Geschwindigkeit der Rakete berechnet. Dies ergibt

$$p_1 + p'_1 = (m_0 - \Delta m_0) v_1 \gamma_1 + \Delta m_0 v'_1 \gamma'_1 = m_0 v_0 \gamma_0 \quad (6.83)$$

oder allgemein

$$p_K + p'_K = (m_{K-1} - \Delta m_{K-1}) v_K \gamma_K + \Delta m_{K-1} v'_K \gamma'_K = m_{K-1} v_{K-1} \gamma_{K-1} \quad (6.84)$$

Hierbei haben v und v' unterschiedliche Richtungen (daher das „+“ in der Formel). Bezogen auf die Rakete hat das Gas die konstante Austrittsgeschwindigkeit v'_0 . Damit gilt die relativistische Geschwindigkeitsaddition

$$v'_K = \frac{v_K + v'_0}{1 + \frac{v_K v'_0}{c^2}} \quad (6.85)$$

Für jeden dieser Schritte K kann nun aus den Gleichungen (6.84) und (6.85) die Geschwindigkeit der Rakete v_K berechnet werden; es handelt sich hierbei also um zwei ineinander geschachtelte numerische Beziehungen.

Zur Durchführung einer solchen Berechnung wurde eine Programmierung in Visual Basic (VBA) vorgenommen. Der VBA Programm-Code ist in Anlage C mit den entsprechenden Formeln und einem Flussdiagramm zusammengestellt. Der wesentliche Zweck dieser Berechnungen ist die Gegenüberstellung von Systemen, die sich zum Zeitpunkt des Versuchstarts im Ruhezustand und hierzu relativ bewegt befinden. Dazu wurden exemplarisch zwei Berechnungsvarianten programmiert, wobei erstens die Beschleunigung sowie im zweiten Fall die Ausströmgeschwindigkeit der Stützmasse konstant gehalten wurde.

a) Stützmasse proportional zur verbleibenden Masse der Rakete

Hierbei ergeben sich über den gesamten Betrachtungszeitraum konstante Beschleunigungswerte für die Rakete. Diese Situation entspricht somit dem bereits in Kap. 6.4.1 beschriebenen Fall.

In der Tabelle 6.3 sind Ergebnisse von zwei Berechnungen mit stark unterschiedlichen Ausgangsgeschwindigkeiten wiedergegeben, wobei hier $v_0 = 0$ und $v_0 = 0,5c$ gewählt

6. Relationen für Masse, Impuls, Kraft und Energie

wurden. Um einen Vergleich der Ergebnisse untereinander zu ermöglichen, wurde dabei die Endgeschwindigkeit der Rakete aus Sicht eines ruhenden Beobachters als Differenz $v_T = v_N - v_0$ dargestellt. Der Wert t_T ist die Gesamtzeit, die sich aus Sicht des unbewegten Systems bei Anwendung der Lorentz-Gleichungen subjektiv für einen mit Systemgeschwindigkeit v_0 bewegten Beobachter bis zum Eintreffen eines Signals aus der Rakete ergibt.

Ergänzend ist der aus Sicht des ruhenden Beobachters bis zur Ausstrahlung des Impulses zurückgelegte Weg x_N aufgeführt. Weiterhin ist die sich bei der Berechnung ergebende Masse m_N der Rakete nach Abschluss des Versuchs dargestellt (bezogen auf den Ausgangswert $m_0 = 1$). Außerdem sind die Werte für die Beschleunigungen a_N und auch die Berechnung für $\gamma^3 a_N$ angegeben.

K	N	v_T	t_T	m_N	x_N	a_N	$\gamma^3 a_N$
1	10	3,999999999413	400,00266852469	0,3486784401000	800,0000000579	9,9999999975878	10,000000000258
2	10 ²	3,999999999407	400,00266852463	0,3660323412732	800,0000000592	9,9999999973564	10,000000000027
3	10 ³	3,999999999408	400,00266852463	0,3676954247710	800,0000000594	9,9999999973343	10,000000000005
4	10 ⁴	3,999999999424	400,00266852463	0,3678610464329	800,0000000596	9,9999999973292	10,000000000000
5	10 ⁵	3,999999999581	400,00266852464	0,3678776017666	800,0000000616	9,9999999975070	10,000000000177
6	10 ⁶	4,0000000001169	400,00266852155	0,3678792572316	800,0000000717	9,9999999975070	10,000000000177
7	10 ⁷	4,0000000016930	400,00266859493	0,3678794227775	800,0000004935	10,000000005125	10,000000007795
		δv_T	δt_T	δm_N	δx_N	δa_N	$\delta \gamma^3 a_N$
1/2		$-5,7021 \cdot 10^{-13}$	$-5,7980 \cdot 10^{-11}$	$1,7354 \cdot 10^{-2}$	$1,2930 \cdot 10^{-9}$	$-2,3141 \cdot 10^{-10}$	$-2,3141 \cdot 10^{-10}$
2/3		$1,3989 \cdot 10^{-13}$	$-1,0232 \cdot 10^{-12}$	$1,6631 \cdot 10^{-3}$	$1,3006 \cdot 10^{-10}$	$-2,2089 \cdot 10^{-11}$	$-2,2089 \cdot 10^{-11}$
3/4		$1,5601 \cdot 10^{-12}$	0	$1,6562 \cdot 10^{-4}$	$2,1396 \cdot 10^{-10}$	$-5,0804 \cdot 10^{-12}$	$-5,0804 \cdot 10^{-12}$
4/5		$1,5710 \cdot 10^{-11}$	$8,98 \cdot 10^{-12}$	$1,6555 \cdot 10^{-5}$	$2,0430 \cdot 10^{-9}$	$1,7776 \cdot 10^{-10}$	$1,7776 \cdot 10^{-10}$
5/6		$1,5883 \cdot 10^{-10}$	$-3,09 \cdot 10^{-9}$	$1,6555 \cdot 10^{-6}$	$1,0087 \cdot 10^{-8}$	0	0
6/7		$1,5760 \cdot 10^{-9}$	$7,3485 \cdot 10^{-8}$	$1,6555 \cdot 10^{-7}$	$4,2175 \cdot 10^{-7}$	$7,6180 \cdot 10^{-9}$	$7,6180 \cdot 10^{-9}$

K	N	v_T	t_T	m_N	x_N	a_N	$\gamma^3 a_N$
1	10	2,9999709803087	400,00266851663	0,3486784401000	69235026,29063	6,4951038669616	10,000066715204
2	10 ²	2,9999700801272	400,00266851582	0,3660323412732	69235026,29036	6,4950395173348	9,9999676404299
3	10 ³	2,9999699985783	400,00266851575	0,3676954247710	69235026,29034	6,4950389552623	9,9999667750399
4	10 ⁴	2,9999700695917	400,00266851581	0,3678610464329	69235026,29036	6,4950385228968	9,9999661093612
5	10 ⁵	2,9999708701507	400,00266851649	0,3678776017666	69235026,29059	6,4950356404560	9,9999616715177
6	10 ⁶	2,9999825792620	400,00266852517	0,3678792572316	69235026,29360	6,4949779917004	9,9998729144571
7	10 ⁷	3,0001320510055	400,00266865907	0,3678794227775	69235026,33995	6,4955544754057	10,000760496920
		δv_T	δt_T	δm_N	δx_N	δa_N	$\delta \gamma^3 a_N$
1/2		$-9,0018 \cdot 10^{-7}$	$-8,1502 \cdot 10^{-10}$	$1,7354 \cdot 10^{-2}$	$-2,6439 \cdot 10^{-4}$	$-6,4350 \cdot 10^{-5}$	$-9,9075 \cdot 10^{-5}$
2/3		$-8,1549 \cdot 10^{-8}$	$-7,2987 \cdot 10^{-11}$	$1,6631 \cdot 10^{-3}$	$-2,5108 \cdot 10^{-5}$	$-5,6207 \cdot 10^{-7}$	$-8,6539 \cdot 10^{-7}$
3/4		$7,1013 \cdot 10^{-8}$	$6,4006 \cdot 10^{-11}$	$1,6562 \cdot 10^{-4}$	$2,2203 \cdot 10^{-5}$	$-4,3237 \cdot 10^{-7}$	$-6,6568 \cdot 10^{-7}$
4/5		$8,0056 \cdot 10^{-7}$	$6,7701 \cdot 10^{-10}$	$1,6556 \cdot 10^{-5}$	$2,3431 \cdot 10^{-4}$	$-2,8824 \cdot 10^{-6}$	$-4,4378 \cdot 10^{-6}$
5/6		$1,1709 \cdot 10^{-5}$	$8,6780 \cdot 10^{-9}$	$1,6555 \cdot 10^{-6}$	$3,0045 \cdot 10^{-3}$	$-5,7649 \cdot 10^{-5}$	$-8,8757 \cdot 10^{-5}$
6/7		$1,4947 \cdot 10^{-4}$	$1,3391 \cdot 10^{-7}$	$1,6555 \cdot 10^{-7}$	$4,6355 \cdot 10^{-2}$	$5,7648 \cdot 10^{-4}$	$8,8758 \cdot 10^{-4}$

Tab. 6.3: Werte für v_T , t_T , m_N , x_N , a_N , $\gamma^3 a_N$ bei proportionaler Abnahme der Stützmasse. Oben: $v_0 = 0$, unten: $v_0 = 0,5 c$ (149.896,458 km/s). $\Delta m_0 = 0,25\%/s$, $t_s = 400s$. Die Angaben für m_N sind normiert auf 1. Angaben für v_T in km/s, t_T in s, x_N in km, a_N und $\gamma^3 a_N$ in m/s².

Als Massenverlust wurde $\Delta m_0 = 0,25\%/s$ festgelegt. Dieser führt zu einer Beschleunigung von $10m/s^2$ und damit ist eine Vergleichbarkeit mit den anderen bereits durchgeführten Berechnungen gegeben. Als Versuchszeit wurde $t_S = 400s$ gewählt, und damit verbleibt nach Abschluss des Versuchs die realistische Größe einer Restmasse von fast 37% des Ausgangswertes. Zur besseren Bewertung sind die Abweichungen zwischen $\delta v_T = v_T(K)$ und $v_T(K - 1)$ gemäß den auch sonst benutzten Beziehungen (z. B. wie in Gl. (6.79) definiert), sowie in gleicher Weise für δt_T , δm_N , δx_N , a_N und $\gamma^3 a_N$ dargestellt, wobei K hier jeweils einer Zehnerpotenz in der Anzahl der Berechnungsschritte zwischen 10 und 10^7 entspricht (vgl. Tab. 6.3). Zunächst ist grundsätzlich festzuhalten, dass die Werte für δv_T , δt_T und δx_N unsystematische Schwankungen zeigen und im Bereich der Anzahl von Iterationsschritten zwischen $N = 10^2$ und 10^4 die geringsten Abweichungen voneinander aufweisen. Hiermit ist klar, dass die sichtbaren Unterschiede nicht durch einen physikalisch erklärbaren Effekt, sondern nur durch die Verwendung des numerischen Verfahrens hervorgerufen werden.

Des Weiteren ist festzustellen, dass die Größe der verbleibenden Masse m_N mit jeder Erhöhung um den Faktor 10 bei der Anzahl von Iterationsschritten im Ergebnis ebenfalls um den gleichen Faktor genauer wird (Iteration $10^3 \rightarrow 10^4 = 1.6562 \cdot 10^{-4}$; $10^4 \rightarrow 10^5 = 1.6566 \cdot 10^{-5}$ usw. vgl. Tab. 6.3). Dies ist hier nicht weiter von Bedeutung und daher wird an dieser Stelle auf eine Bewertung verzichtet; das ändert sich aber bei den nachfolgenden Betrachtungen für den Fall der konstanten Stützmasse und wird dort weiter untersucht.

Die Ergebnisse der Berechnungen für $\gamma^3 a_N$ zeigen erneut, dass das Verhältnis für die Beschleunigungen zwischen unterschiedlich bewegten Beobachtern der Faktor γ^3 ist.

Die hier getroffene Festlegung mit proportionalem Massenverlust bezüglich der Restmasse erlaubt einen direkten Vergleich mit den analytischen und numerischen Ergebnissen aus Kap. 6.4.1., und die Übereinstimmung erweist sich als sehr gut. Eine detaillierte Auswertung ist in Anlage B.4 dargestellt.

b) Stützmasse konstant

Dieser Fall erweist sich als deutlich komplexer bezüglich der Auswertung im Vergleich zur zuvor diskutierten Situation. Dies liegt daran, dass die für die Betrachtung wichtigen Größen v_T , t_T und x_N das gleiche Verhalten aufweisen wie zuvor m_N und mit steigender Anzahl an Iterationsschritten genauer werden. Sie müssen deshalb besonders analysiert werden (im Gegensatz zum Fall zuvor zeigt m_N dieses Verhalten hier nicht!).

Deutlich wird dies bei der Betrachtung des in Tab. 6.4 dargestellten Falls. Im oberen Teil der Tabelle sind wie zuvor die Ergebnisse der Berechnungen der relevanten Größen angegeben, darunter folgt – mit Sektion I gekennzeichnet – die Zusammenstellung der Abweichungen δv_T , δt_T , δm_N und δx_N . Die erste und die letzte Berechnung weicht in den Werten von der Systematik der anderen Ergebnisse ab und wurde nicht weiter berücksichtigt. Es wurden deshalb nur die blau eingefärbten Felder für weiterführende Berechnungen genutzt und die in Sektion II wiedergegebenen Werte daraus extrapoliert. Die im unteren Bereich der Tabelle dargestellten Ergebnisse ergeben sich aus diesen Berechnungen. Die Massenabnahme wurde auf $\Delta m_0 = 0,5\%/s$ festgelegt, was bei für den hier gewünschten Massenendwert von 50% zu einer Versuchsdauer von $t_0 = 100s$ führt.

In der Anlage C sind neben der Herleitung des Programmaufbaus weitere Ergebnisse der Berechnungen für unterschiedliche Randbedingungen in den Tabellen C.2, C.3 und C.4

6. Relationen für Masse, Impuls, Kraft und Energie

dargestellt. Neben den Werten für die Systemgeschwindigkeit $v_0 = 0$ wurden zur besseren Übersicht auch noch Ergebnisse für 369 km/s, 2.000 km/s und 10.000 km/s hinzugefügt. Bei diesen Fällen wurde auch mit einem Wert von 10% eine geringere verbleibende Restmasse nach dem Versuch festgelegt.

N	v_T	t_T	m_N	x_N	Δt_o
10	2,67508561278727	100,000397329364	0,500000000000000	119,116010675216	10
10^2	2,76261372200990	100,000408141269	0,500000000000000	122,357320955608	1
10^3	2,77158897232187	100,000409292747	0,500000000000055	122,702523336750	10^{-1}
10^4	2,77248872482278	100,000409408634	0,500000000000055	122,737265091767	10^{-2}
10^5	2,77257872237194	100,000409420246	0,499999999996724	122,740741494222	10^{-3}
10^6	2,77258772224753	100,000409422400	0,500000000041133	122,741089155569	10^{-4}
10^7	2,77258862465211	100,000409440862	0,499999999708066	122,741124020357	10^{-5}
	δv_T	δt_T	δm_N	δx_N	
$\bar{x}$	8,9931	$1,4064 \cdot 10^{-3}$		$3,4698 \cdot 10^2$	
10^2	$8,7528 \cdot 10^{-2}$	$1,0812 \cdot 10^{-5}$	0	3,2413	I
10^3	$8,9753 \cdot 10^{-3}$	$1,1515 \cdot 10^{-6}$	$5,4956 \cdot 10^{-14}$	$3,4520 \cdot 10^{-1}$	
10^4	$8,9975 \cdot 10^{-4}$	$1,1589 \cdot 10^{-7}$	0	$3,4742 \cdot 10^{-2}$	
10^5	$8,9998 \cdot 10^{-5}$	$1,1612 \cdot 10^{-8}$	$-3,3309 \cdot 10^{-12}$	$3,4764 \cdot 10^{-3}$	
10^6	$8,9998 \cdot 10^{-6}$	$2,1540 \cdot 10^{-9}$	$4,4409 \cdot 10^{-11}$	$3,4766 \cdot 10^{-4}$	
10^7	$9,0240 \cdot 10^{-7}$	$1,8462 \cdot 10^{-8}$	$-3,3307 \cdot 10^{-10}$	$3,4865 \cdot 10^{-5}$	
10^8	$8,9931 \cdot 10^{-8}$	$1,4069 \cdot 10^{-11}$		$3,4698 \cdot 10^{-6}$	II
10^9	$8,9931 \cdot 10^{-9}$	$1,4069 \cdot 10^{-12}$		$3,4698 \cdot 10^{-7}$	
10^{10}	$8,9931 \cdot 10^{-10}$	$1,4211 \cdot 10^{-13}$		$3,4698 \cdot 10^{-8}$	
10^{11}	$8,9931 \cdot 10^{-11}$	0		$3,4698 \cdot 10^{-9}$	
10^{12}	$8,9933 \cdot 10^{-12}$	0		$3,4699 \cdot 10^{-10}$	
10^{13}	$8,9928 \cdot 10^{-13}$	0		$3,4703 \cdot 10^{-11}$	
10^{14}	$9,0150 \cdot 10^{-14}$	0		$3,4674 \cdot 10^{-12}$	
10^{15}	$8,8818 \cdot 10^{-15}$	0		$3,4106 \cdot 10^{-13}$	
10^{16}	0	0		0	
	v_T	t_T		x_N	
10^7	2,77258862155768	100,000409422541		122,741123853607	
10^8	2,77258871148869	100,000409422555		122,741127323411	
10^9	2,77258872048179	100,000409422556		122,741127670391	
10^{10}	2,77258872138110	100,000409422556		122,741127705089	
10^{11}	2,77258872147103	100,000409422556		122,741127708559	
10^{12}	2,77258872148003	100,000409422556		122,741127708906	
10^{13}	2,77258872148093	100,000409422556		122,741127708941	
10^{14}	2,77258872148102	100,000409422556		122,741127708944	
10^{15}	2,77258872148102	100,000409422556		122,741127708945	
10^{16}	2,77258872148102	100,000409422556		122,741127708945	

Tab. 6.4: Werte für v_T , t_T , m_N und x_N bei linearer Abnahme der Stützmasse.
 Sektion I: Berechnungen, Sektion II: extrapoliert. Alle Angaben in km und s.
 Typ: A1, $v'_0 = -4$ km/s, $\Delta m_0 = 0,5\%/s$, $t_0 = 100s$, $v_0 = 0$

6.4 Signalaustausch während und nach Beschleunigungen

Auch hier ergeben sich die wichtigsten Aussagen aus dem Vergleich der berechneten Zeiten für t_T , die die Signallaufzeiten bis zum Erreichen eines mit v_0 bewegten Beobachters, berechnet aus Sicht des ruhenden Systems, darstellen. Zum besseren Vergleich der Zeiten wurde in diesem Fall wie auch in anderen Fällen die Vergleichsgröße

$$\delta t_T = \frac{t_T(v_K)}{t_T(v_{K-1})} - 1 \quad (6.86)$$

gewählt. In Tabelle 6.5 sind die Ergebnisse der Werte für t_T und δt_T zusammengestellt, wobei für t_T jeweils die letzten (für $N = 10^{16}$) berechneten Werte wiedergegeben wurden. Es zeigen sich untereinander keine systematischen Abweichungen für die untersuchten Systemgeschwindigkeiten.

	1		2		3	
v_0	t_T	δt_T	t_T	δt_T	t_T	δt_T
0	100,000409422556		1.000,00992905474		10.002,4827416511	
369	100,000409421505	$1,05 \cdot 10^{-11}$	1.000,00992904501	$9,73 \cdot 10^{-12}$	10.002,4827411418	$5,09 \cdot 10^{-11}$
2000	100,000409421509	$-3,40 \cdot 10^{-14}$	1.000,00992904483	$1,76 \cdot 10^{-13}$	10.002,4827388902	$2,25 \cdot 10^{-10}$
10000	100,000409421471	$3,74 \cdot 10^{-13}$	1.000,00992904385	$9,82 \cdot 10^{-13}$	10.002,4827278462	$1,10 \cdot 10^{-9}$

Tab. 6.5: t_T und δt_T bei konstanter Stützmasse pro Zeiteinheit für verschiedene v_0 . Δm_0 auf 1 normiert.

- 1: $v'_0 = -4 \text{ km/s}$, $\Delta m_0 = 0,5\%/s$, $t_0 = 100s$
- 2: $v'_0 = -4 \text{ km/s}$, $\Delta m_0 = 0,09\%/s$, $t_0 = 1.000s$
- 3: $v'_0 = -100 \text{ km/s}$, $\Delta m_0 = 0,009\%/s$, $t_0 = 10.000s$

Für die Betrachtung der Endgeschwindigkeit v_T ergibt sich die Möglichkeit eines Vergleichs mit den nach der klassischen Raketenformel ermittelten Werten. Die von K. E. Ziolkowski im Jahre 1903 hergeleitete Formel basiert auf der nicht relativistischen Impulsgleichung und hat das Ziel, für eine konstante Stützmasse die Endgeschwindigkeit einer Rakete in Abhängigkeit von der Austrittsgeschwindigkeit des Gases zu berechnen. Bei nicht relativistischer Betrachtung mit $v \ll c$ wird zunächst Gl. (6.85) zu

$$v'_K = v_K + v'_0 \quad (6.87)$$

Zur Lösung der Gleichung Gl. (6.84) gilt die Festlegung, dass $\gamma = 1$ (da nicht relativistisch) ist. Da die Masse der Rakete mit steigendem Index K abnimmt, die Geschwindigkeit aber steigt, gilt ergänzend

$$m_K = m_{K-1} - \Delta m_{K-1} \quad v_K = v_{K-1} + \Delta v_{K-1}$$

Außerdem werden für eine differentielle Betrachtung folgende Definitionen eingeführt:

$$\begin{aligned} m_K &\rightarrow m & \Delta m &\rightarrow dm \\ v_K &\rightarrow v & \Delta v &\rightarrow dv \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich für Gl. (6.84) der Ansatz:

6. Relationen für Masse, Impuls, Kraft und Energie

$$(m + dm - dm)v + dm(v + v'_0) = (m + dm)(v - dv) \quad (6.88)$$

$$mv + vdm + v'_0 dm = mv - mdv + vdm - dmdv \quad (6.89)$$

und damit folgt wegen $dmdv \rightarrow 0$

$$mdv + v'_0 dm = 0 \quad (6.90)$$

Werden Masse und Geschwindigkeit des ausströmenden Gases (und damit der Impuls) konstant gehalten so führt die Integration von Gl. (6.90) zur klassischen Raketenformel

$$\int_0^v dv = -v'_0 \int_{m_0}^m \frac{dm}{m} \quad (6.91)$$

$$v = v'_0 \ln\left(\frac{m_0}{m}\right) \quad (6.92)$$

wobei m_0 die Masse beim Start von einem unbewegten Ausgangspunkt ist. Sollte dieser bewegt sein, so wird die dabei vorliegende Geschwindigkeit einfach hinzuaddiert. Dies wird z. B. erforderlich beim Abwurf einer Raketenstufe, wenn die Masse sich verringert und auch der Impuls sich ändert.

Neben der klassischen Raketenformel nach Ziolkowski existiert auch eine relativistische Raketenformel. Diese wurde im Jahre 1946 von J. Akeret abgeleitet [90]. Die Herleitung ist deutlich komplexer und erfordert zusätzlich die Verwendung des Energieerhaltungssatzes; sie ist in der Anlage C unter Punkt C.4 dargestellt. Das Ergebnis der relativistischen Raketengleichung entsprechend Gl. (C.33) ist

$$\frac{v}{c} = \frac{1 - \left(\frac{m}{m_0}\right)^{2v'_0/c}}{1 + \left(\frac{m}{m_0}\right)^{2v'_0/c}} \quad (6.93)$$

Werden die klassische und die relativistische Raketengleichung mit v_R als Grenzfall für die Endgeschwindigkeit zur vorgestellten Lösung der numerisch abgeleiteten relativistischen Raketenformeln aufgefasst und die Ergebnisse aus den in Anlage C, Tabellen C2, C3 und C4 berechneten Werten für v_T jeweils damit in Beziehung gesetzt, so ergeben sich für

$$\delta_R = \frac{v_R}{v_T} - 1 \quad (6.93)$$

die in Abb. 6.4 dargestellten Zusammenhänge. Dabei wird zunächst deutlich, dass für niedrige Systemgeschwindigkeiten, insbesondere im Fall $v_0 = 0$, für Iterationsschritte von $N = 10$ bis $N = 10^7$ keine ausreichende Genauigkeit erreicht wird und sie daher nur mit Einschränkungen zu betrachten sind. Werden hingegen die bis $N = 10^{16}$ berechneten extrapolierten Werte hinzugefügt, ergibt sich ein deutlich verbessertes Ergebnis. Werden die Werte für klassische und relativistische Raketenformel miteinander verglichen, so zeigen sich für $v'_0 = -4$ km/s keine Unterschiede, während für $v'_0 = -100$ km/s Abweichungen für kleine Systemgeschwindigkeiten ($v_0 = 0$ und 369 km/s) feststellbar sind. Hierzu wurden die Ergebnisse für die klassische Raketenformel (Ziolkowski) und relativistisch (Akeret) separat in den Teildiagrammen c) und d) dargestellt.

6.4 Signalaustausch während und nach Beschleunigungen

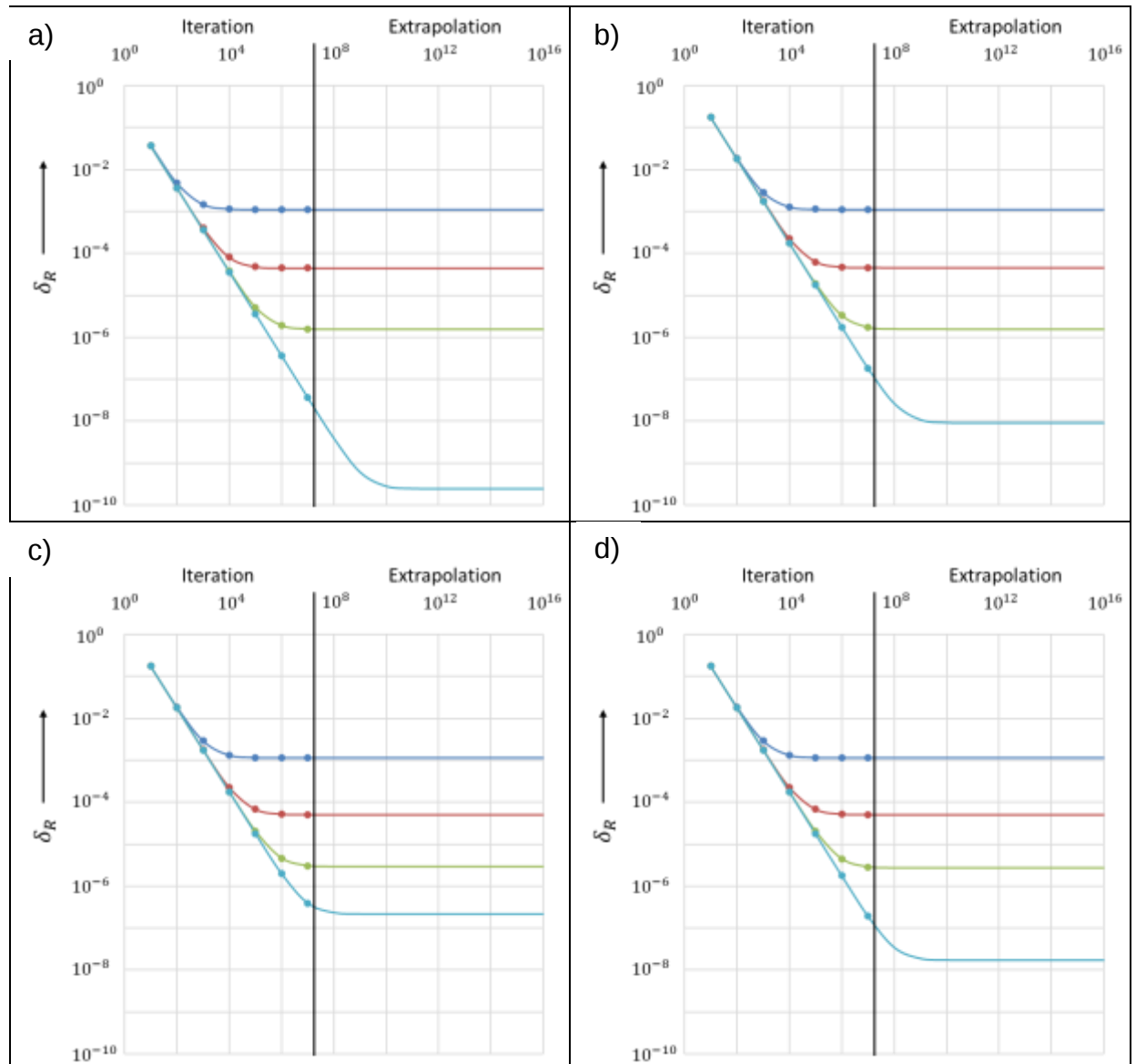


Abb. 6.4: Verhältnis δ_R zwischen Raketengleichungen und numerischer Raketenformel in Abhängigkeit von der Anzahl der Iterationsschritte aus Tab. C.2, C3 und C4.

a) $v'_0 = -4 \text{ km/s}$, $\Delta m_0 = 0,5\%/s$, $t_0 = 100s$

b) $v'_0 = -4 \text{ km/s}$, $\Delta m_0 = 0,09\%/s$, $t_0 = 1.000s$

c) und d) $v'_0 = -100 \text{ km/s}$, $\Delta m_0 = 0,009\%/s$, $t_0 = 10.000s$

c) klassisch (nach K. E. Ziolkowski), d) relativistisch (nach J. Akeret).

a) bis d) jeweils unten $v_0 = 0$ dann aufsteigend $v_0 = 369, 2.000, 10.000 \text{ km/s}$
 Δm_0 auf 1 normiert.

Um das Verhalten bei höheren Geschwindigkeiten zu bewerten, werden Ergebnisse aus den numerischen Raketengleichungen mit entsprechenden Werten aus der klassischen und der relativistischen Raketenformel verglichen. In Tab. 6.6 sind für die Parameter v'_0/c (Gasaustrittsgeschwindigkeit einer Rakete im Verhältnis zur Lichtgeschwindigkeit) sowie für das Verhältnis von End- zur Ursprungsmasse die berechneten Werte der Endgeschwindigkeit eingetragen.

Eine Bewertung ergibt, dass bis zu einer Geschwindigkeit des austretenden Gases von $0,01c$ keine großen Unterschiede zwischen den Berechnungen auftreten. Bei $0,1c$ werden

die Unterschiede zwischen klassischer Raketenformel und den anderen beiden Varianten bereits deutlich und bei $0,5c$ wird nach dem klassischen nicht relativistischen Verfahren bei einer Massenabgabe von ca. 90% die Lichtgeschwindigkeit überschritten. Die Werte nach J. Akeret und die der eigenen numerischen Berechnung, die natürlich unterhalb der Lichtgeschwindigkeit bleiben, unterscheiden sich dabei kaum.

v'_0/c	A			B			C		
m/m_0	0,01	0,01	0,01	0,1	0,1	0,1	0,5	0,5	0,5
0,5	0,006931	0,006931	0,006932	0,069315	0,069204	0,069432	0,346574	0,333333	0,362675
0,2	0,016094	0,016093	0,016093	0,160944	0,159568	0,159727	0,804719	0,666667	0,681958
0,1	0,023026	0,023022	0,023022	0,230259	0,226274	0,226122	1,151293	0,818182	0,818378
0,01	0,046052	0,046019	0,046021	0,460517	0,430506	0,428238	2,302585	0,980198	0,973447
0,001	0,069078	0,068968	0,069009	0,690776	0,598480	0,593888	3,453878	0,998002	0,996217

Tab. 6.6: Endgeschwindigkeit einer Rakete (im Verhältnis zur Lichtgeschwindigkeit) in Abhängigkeit vom Berechnungsverfahren.
Parameter oben: Gasgeschwindigkeit (im Verhältnis zur Lichtgeschwindigkeit)
Parameter links: Verhältnis von End- zur Ursprungsmasse
A: Klassisch, nach K. E. Ziolkowski
B: Relativistisch, nach J. Akeret
C. Numerisch, Berechnungen gem. Anlage C ($\Delta m_0 = 10^{-5} \text{ \%}/s$, $\Delta t_s = 100s$)

Der wesentliche Unterschied zwischen analytischer und numerischer Berechnung besteht darin, dass für das analytische Verfahren keine Ausstoßmenge des Gases *pro Zeiteinheit* vorgegeben werden muss und dass damit das Ergebnis unabhängig von der während eines Raketenstarts auftretenden Beschleunigung ist. Daher gibt es auch keine Aussagen darüber, welche Entfernung die Rakete in welcher Zeit zurückgelegt hat. Für die zuvor durchgeführten Berechnungen können daher nur die gemäß des beschriebenen numerischen Verfahrens ermittelten Daten verwendet werden, die analytische bestimmte Raketenformel liefert die nötigen Information nicht.

Um dies zu verdeutlichen, werden im Folgenden Ergebnisse für Gasausstoßgeschwindigkeiten von $v'_0 = -0,5c$ und $v'_0 = -100 \text{ km}/s$ dargestellt. In Tab. 6.7 wurden für die numerische Ermittlung Gasausstoßmengen von $\Delta m_0 = 10^{-7}$ bis $10^{-4}/s$ (entsprechend $\Delta m_0 = 10^{-5}$ bis $10^{-2} \text{ \%}/s$) gewählt und auf hierfür die Werte von v_T , t_T , x_K und a_K berechnet. Zunächst ist festzustellen, dass in allen Fällen die Endgeschwindigkeit v_T für die jeweilige Gasaustrittsgeschwindigkeit konstant bleibt. Bei der Steigerung um eine Zehnerpotenz für die Gasausstoßmenge (pro Zeiteinheit) steigen die Werte für die Gesamtdauer des Versuchs t_T sowie die zurückgelegte Strecke x_K um den gleichen Faktor an. Die auftretende Beschleunigung a_K sinkt hingegen um den gleichen Betrag.

Abschließend muss noch auf einen wesentlichen Unterschied zwischen numerischem Verfahren und der relativistischen Raketenformel hingewiesen werden. Während letztere unter Verwendung des Energieerhaltungssatzes abgeleitet wurde, liegt dem numerischen Verfahren (wie auch der klassischen Raketenformel nach Ziolkowski) ausschließlich der Impulserhaltungssatz zugrunde. Für die Berechnung bedeutet dies, dass sich der Impuls

6.4 Signalaustausch während und nach Beschleunigungen

des Antriebsgases durch immer stärkere Annäherung an die Lichtgeschwindigkeit beliebig steigern lassen könnte und somit bei geringem Masseausstoß extrem hohe Raketengeschwindigkeiten erreichbar wären. Dies ist jedoch nicht möglich, weil für die Beschleunigung des Ausstoßgases erhebliche Energiemengen (und damit wegen $E = mc^2$ zusätzliche Massenverluste) benötigt würden, die bei der Berechnung nicht berücksichtigt werden. Für diese extremen Werte ist daher das dargestellte numerische Verfahren nicht einsetzbar.

	$v'_0 = -0,1c$				$v'_0 = -100\text{km/s}$			
Δm_0	v_T	t_T	x_K	a_K	v_T	t_T	x_K	a_K
10^{-7}	67789,6421	9713871,60	2017951968	27,5336472	230,263962	900233,452	669757541	0,0999999043
10^{-6}	67789,6421	971387,160	2017951968	275,336472	230,263962	900233,452	66975754,1	0,9999990426
10^{-5}	67789,6421	97138,7160	2017951968	2753,36472	230,263962	90023,3452	6697575,41	9,9999904265
10^{-4}	67789,6421	9713,87160	201795196,8	27533,6472	230,263962	9002,33452	669757,541	99,999904265

Tab. 6.7: Endgeschwindigkeit v_T , Gesamtdauer t_T , zurückgelegte Strecke x_K und Beschleunigung a_K in Abhängigkeit von der Gasausstoßgeschwindigkeit v'_0 und der Gasmenge (pro Zeiteinheit) Δm_0 .
 v_T in km/s, t_T in s, x_K in km, a_K in m/s², Δm_0 in 1/s (auf 1 normiert)

Das Problem der Bestimmung des Energiebedarfs bei Raketenantrieben wird seit langem diskutiert und kann über die Definition verschiedener Verlustfaktoren gelöst werden. Als Beispiel ist die von U. Walter [91] verwendete Darstellung in Abb. 6.5 wiedergegeben.

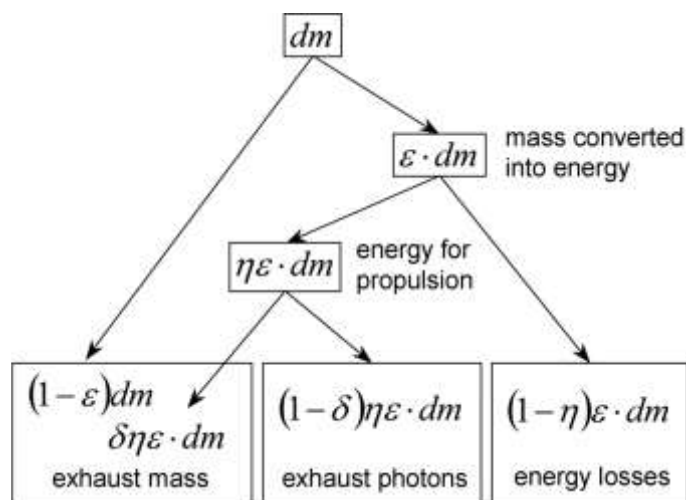


Abb. 6.5: Massenbilanz mit Verlustfaktoren beim Raketenantrieb (entnommen aus [91])

Näheres zu diesem Themenbereich kann weiterführender Literatur entnommen werden [91,92].