

7. Nicht elastische Prozesse

Es wurde bereits ausführlich die Situation beim elastischen Stoß dargestellt. Die Analyse der Vorgänge bei nichtelastischen Prozessen ist für weiterführende Betrachtungen von großem Interesse und soll daher ebenfalls genau untersucht werden. Zunächst wird hierbei ausführlich der nicht elastische Stoß betrachtet, bei dem sich zwei oder mehrere Körper unter Energieaufnahme miteinander verbinden. Der umgekehrte Effekt tritt beim Partikelzerfall auf; hierbei wird durch Energieumwandlung beim Zerfall kinetische Energie freigesetzt und von den Zerfallsprodukten abgeführt. Der nicht elastische Stoß und der Partikelzerfall können somit als komplementäre Prozesse aufgefasst werden.

7.1 Relativistischer nicht elastischer Stoß

Zur relativistischen Betrachtung des nicht elastischen Stoßes werden die Sachverhalte für Beobachter mit verschiedenen Geschwindigkeiten untersucht. Dazu wird nachfolgend ein einfaches Beispiel betrachtet und anschließend werden die sich daraus ableitenden Konsequenzen diskutiert. Es wird folgendes Experiment gewählt:

Zwei Körper treffen zentral aufeinander und trennen sich nicht wieder, d. h. es tritt ideal plastisches Verhalten auf. Der Stoß soll vollkommen zentral erfolgen, so dass sich ebenfalls keine Drehbewegung einstellt. Es ist somit keine vektorielle Betrachtung erforderlich und daher ergibt sich folgender Zusammenhang für den Impuls nach dem Stoß

$$p_3 = p_1 + p_2 = m_1\gamma_1 v_1 + m_2\gamma_2 v_2 = m_3\gamma_3 v_3 \quad (7.01)$$

wobei v_1 und v_2 die Geschwindigkeiten vor und v_3 nach dem Stoß darstellen, das gleiche gilt für die Massen m_1 , m_2 und m_3 . Wird angenommen, dass sich die Masse m_3 nach dem Stoß in Ruhe befindet so müssen sich aufgrund des Impulserhaltungssatzes die Werte für p_1 und p_2 gegenseitig aufheben. Dies bedeutet, dass die Beträge von p_1 und p_2 gleich sind und sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden und dass der Gesamtimpuls p_3 vor und nach dem Stoß in beiden Fällen gleich Null ist.

Die kinetische Energie vor und nach dem Stoß ist dagegen nicht gleich. Dies wird deutlich, wenn die Gleichung der kinetischen Energie vor dem Stoß aufgestellt wird (vgl. auch Darstellung in Kap. 6.1)

$$E_{kin} = (\gamma_1 - 1)m_1c^2 + (\gamma_2 - 1)m_2c^2 \quad (7.02)$$

7.1 Relativistischer nicht elastischer Stoß

Wird hierbei wieder der Fall betrachtet, dass m_3 nach dem Stoß ruhen soll ist dementsprechend die kinetische Energie ebenfalls gleich Null. Da die kinetische Energie aber keine vektorielle Größe, sondern ein Skalar ist muss sie sich in eine andere Energieform umwandeln, um den Energieerhaltungssatz nicht zu verletzen. Wird angenommen, dass die Energie sich gemäß der Gl. (6.15) vollständig in Masse umwandelt entsteht also folgende Beziehung

$$\Delta m_3 = (\gamma_1 - 1)m_1 + (\gamma_2 - 1)m_2 \quad (7.03)$$

wobei Δm_3 der Massenanstieg aufgrund der Energieumwandlung ist.

Zur näheren Untersuchung dieser Zusammenhänge wird im Folgenden betrachtet, wie sich dieser Fall für einen ruhenden und einen bewegten Beobachter darstellt. Zur Vereinfachung der Rechnungen wird dabei zunächst unterstellt, dass die Massen der Körper $m_1 = m_2 = m$ gleich sind. Die Fälle werden mit A und B bezeichnet; diese Kennzeichnung wird im Folgenden zur eindeutigen Identifizierung für die entsprechenden Situationen als Index bei den geschwindigkeitsabhängigen Größen weiterverwendet. Es wird zunächst außerdem unterstellt, dass die einfache Relation $m_3 = m_1 + m_2$ gültig ist (d. h. $\Delta m_3 = 0$). Dies wird in der weiteren Betrachtung zu Widersprüchen führen und es wird sich zeigen, dass Gl. (7.03) uneingeschränkt gelten muss.

A: Bezüglich eines absolut ruhenden Beobachters A ist die Geschwindigkeit $v_{3A} = 0$

Da $m_1 = m_2$ angenommen wurde bedeutet dies, dass sich vor dem Stoß die Körper mit gleicher Geschwindigkeit aber entgegengesetztem Vorzeichen aufeinander zubewegen, d. h. neben $v_{3A} = 0$ gilt auch $v_{1A} = -v_{2A}$.

B: Bezüglich eines absolut ruhenden Beobachters B ist die Geschwindigkeit $v_{1B} = 0$

Demnach beruhen alle Berechnungen auf $v_{1B} = 0$.

Daraus ergeben sich die folgenden Zusammenhänge:

	Beobachter A $v_{3A} = 0 \quad v_{1A} = -v_{2A}$	Beobachter B $v_{1B} = 0$
Impuls vor dem Stoß	$p_{1A} = m\gamma_{1A}v_{1A}$ $p_{2A} = -m\gamma_{1A}v_{1A}$	$p_{1B} = 0$ $p_{2B} = m\gamma_{2B}v_{2B}$
Impuls nach dem Stoß	$p_{3A} = 0$	$p_{3B} = 2m\gamma_{3B}v_{3B}$
Kinetische Energie vor dem Stoß	$\frac{E_{1A}}{c^2} = (\gamma_{1A} - 1)m$ $\frac{E_{2A}}{c^2} = (\gamma_{1A} - 1)m$	$\frac{E_{1B}}{c^2} = 0$ $\frac{E_{2B}}{c^2} = (\gamma_{2B} - 1)m$
Kinetische Energienach dem Stoß	$\frac{E_{3A}}{c^2} = 0$	$\frac{E_{3B}}{c^2} = 2(\gamma_{3B} - 1)m$

In der Tabelle sind die sich ergebenden Beziehungen für Impuls und kinetische Energie bei identischen Versuchsbedingungen aus Sicht der Beobachter A und B zusammengefasst, die anschließend unter Nutzung der relativistischen Geschwindigkeitsaddition im Detail diskutiert werden.

7.1.1 Ergebnisse auf Basis der relativistischen Geschwindigkeitsaddition

Für Beobachter A liegt der einfache bereits dargestellte Fall $v_{1A} = -v_{2A}$ vor. Um die Geschwindigkeit für B zu ermitteln ist die Verwendung der relativistischen Geschwindigkeitsaddition erforderlich, die bereits ausführlich in Kap. 4.1 beschrieben wurde. Über die Symmetriebetrachtung $v_{3B} = v_{1A}$ führt dies zu der Beziehung

$$v_{2B} = \frac{2v_{1A}}{1 + \left(\frac{v_{1A}}{c}\right)^2} \quad (7.04)$$

Zahlenbeispiel:

Beobachter A	$v_{1A} = 0,5c$	$v_{2A} = -0,5c$	$v_{3A} = 0$
Beobachter B	$v_{1B} = 0$	$v_{2B} = 0,8c$	$v_{3B} = 0,5c$

7.1.2 Ergebnisse auf Basis einer Impulsberechnung

Für den Beobachter A führt die Betrachtung des Impulses wegen $v_{1A} = -v_{2A}$ zum Ergebnis, dass der Gesamtwert vor und nach dem Stoß Null ergibt, d. h.

$$p_{3A} = p_{1A} + p_{2A} = m\gamma_{1A}v_{1A} - m\gamma_{1A}v_{1A} = 0 \quad (7.05)$$

Beobachter B stellt folgenden Zusammenhang fest:

$$p_{1B} = 0 \quad (7.06)$$

$$p_{2B} = m\gamma_{2B}v_{2B} \quad (7.07)$$

$$p_{3B} = 2m\gamma_{3B}v_{3B} \quad (7.08)$$

Aufgrund des Prinzips der Impulserhaltung müssen demnach wegen Gl. (7.01) die Werte für p_{2B} und p_{3B} gleich sein also

$$\gamma_{2B}v_{2B} = 2\gamma_{3B}v_{3B} \quad (7.09)$$

Hieraus lässt sich der Wert für v_{3B} in Abhängigkeit von v_{2B} berechnen.

Aufgrund der Struktur der Gleichung ist keine analytische Lösung möglich, sondern es muss ein numerisches Verfahren genutzt werden. In Anlage D sind hierzu verschiedene Ergebnisse dargestellt; es wurden dabei die Verwendung einfacher Rekursion, das Verfahren nach Newton und die Anwendung der Bisektion gewählt und für unterschiedliche Geschwindigkeiten von v_{2B} die Ergebnisse für v_{3B} berechnet.

Erwartungsgemäß führen alle Iterationsbeziehungen zu den gleichen Ergebnissen; die Verfahren mit einfacher Rekursion und nach Newton haben den Vorteil, dass sie bei geringen Werten von v/c schneller konvergieren. Sie haben jedoch den Nachteil, dass die

7.1 Relativistischer nicht elastischer Stoß

Konvergenz bei steigenden Werten von v/c immer schlechter wird und die Anwendung der Bisektion dann überlegen ist. Ab einem Wert von ca. $v/c < 0,9$ führt nur noch die Bisektion zu konvergenten Lösungen.

Zahlenbeispiel:

Beobachter A	$v_{1A} = 0,5c$	$v_{2A} = -0,5c$	$v_{3A} = 0$
Beobachter B	$v_{1B} = 0$	$v_{2B} = 0,8c$	$v_{3B} = 0,5547c$

7.1.3 Ergebnisse auf Basis der Energiebilanz

Für den Beobachter A tritt der Fall auf, dass die kinetische Energie der auftreffenden Massen vollständig in eine andere Energieform umgewandelt wird (z. B. Wärme). Dieser Energieverlust hat die Größe

$$\frac{E_{1A} + E_{2A}}{c^2} = 2m(\gamma_{1A} - 1) \quad (7.10)$$

Für Beobachter B folgt daraus, dass die Differenz zwischen der Bilanz der kinetischen Energie vor und nach dem Stoß hierdurch ausgeglichen wird, also

$$2m(\gamma_{3B} - 1) = m(\gamma_{2B} - 1) - 2m(\gamma_{1A} - 1) \quad (7.11)$$

$$\gamma_{3B} = \frac{\gamma_{2B} - 2\gamma_{1A} + 3}{2} \quad (7.12)$$

Diese Gleichung lässt sich einfach analytisch lösen über

$$\frac{v_{3B}}{c} = \pm \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma_{3B}^2}} = \pm \sqrt{1 - \frac{4}{(\gamma_{2B} - 2\gamma_{1A} + 3)^2}} \quad (7.13)$$

Zahlenbeispiel:

Beobachter A	$v_{1A} = 0,5c$	$v_{2A} = -0,5c$	$v_{3A} = 0$
Beobachter B	$v_{1B} = 0$	$v_{2B} = 0,8c$	$v_{3B} = 0,5293c$

(Negative Ergebnisse der Wurzel haben aus Plausibilitätsgründen keine Relevanz)

7.1.4 Interpretation der Ergebnisse

In Abb. 7.1 sind die Änderungen der Geschwindigkeit aufgrund der dargestellten Abweichungen graphisch wiedergegeben. Es gelten dabei folgende Definitionen:

$$\delta = \frac{v_{3B} - v_{1A}}{v_{1A}} \quad (7.14)$$

wobei δ_p die prozentuale Abweichung für den Impuls (Kap. 7.1.2) und δ_E für die Energie (Kap. 7.1.3) darstellt. Es ist deutlich zu erkennen, dass die Werte sowohl von der Höhe als auch der Lage des Maximums keine Gemeinsamkeiten aufweisen.

7. Nicht elastische Prozesse

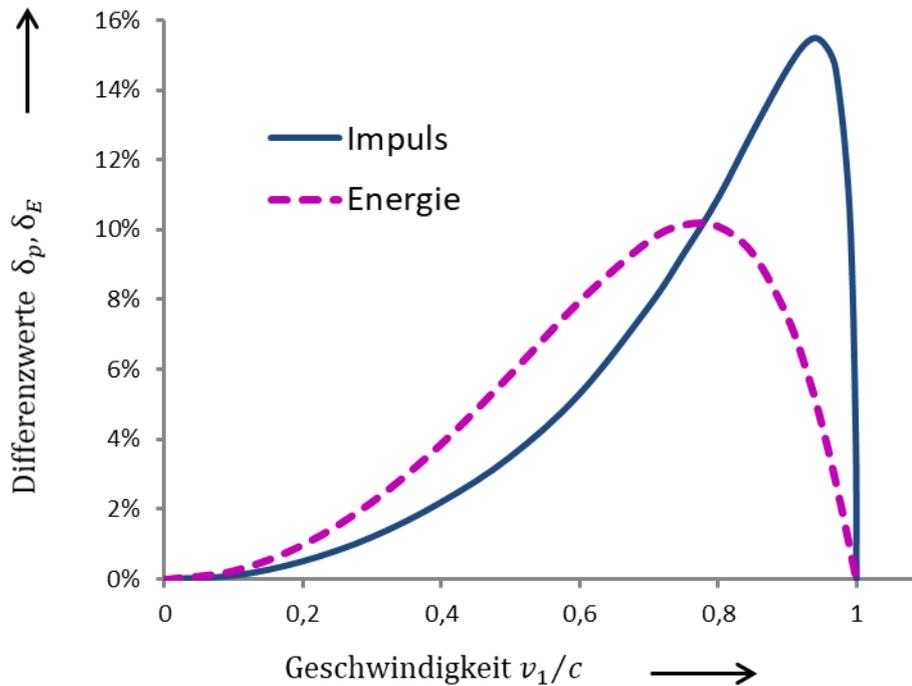


Abb. 7.1: Differenzwerte δ_p und δ_E in Abhängigkeit von v_1

Es ist offensichtlich, dass für den nicht elastischen Stoß die Anwendung der Gleichungen für die relativistische Geschwindigkeitsaddition und die Erhaltungssätze für Impuls und Energie zu jeweils unterschiedlichen Ergebnissen führen. Dies bedeutet, dass zwischen Identitätsprinzip und Äquivalenzprinzip ein Konflikt auftreten würde (zur Definition der Prinzipien vgl. Kap. 1.6).

Es wurde bisher berechnet, wie groß die Geschwindigkeit v_{3B} der beiden verbundenen Massen nach dem Zusammentreffen ist, wenn für $m_3 = m_1 + m_2$ (d. h. $\Delta m_3 = 0$) Impulssatz und Energiesatz angewendet werden. Um die aufgetretenen Probleme zu lösen, wird nun der Effekt untersucht, wie groß der Einfluss auf Impuls und Energie sein muss, wenn die relativistische Geschwindigkeitsaddition ohne weitere Betrachtung gültig ist. Die im Folgenden dargestellten Ansätze ergeben sich, wenn Korrekturfaktoren C_p für den Impuls und C_E für die Energie eingeführt werden.

a) Impuls

Die Gleichung Gl. (7.09) wird modifiziert zu

$$C_p \cdot 2\gamma_{3B}v_{3B} = \gamma_{2B}v_{2B} \quad (7.15)$$

Unter Verwendung der Beziehung $v_{3B} = v_{1A}$ (vgl. Kap. 7.1.1) folgt

$$C_p = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{v_{1A}}{c}\right)^2}}{2v_{1A}} \frac{v_{2B}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_{2B}}{c}\right)^2}} \quad (7.16)$$

Wegen Gl. (7.04) ist dann

7.1 Relativistischer nicht elastischer Stoß

$$\begin{aligned}
 C_p &= \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{v_{1A}}{c}\right)^2}}{2v_{1A}} \frac{\frac{2v_{1A}}{1 + \left(\frac{v_{1A}}{c}\right)^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\frac{2v_{1A}}{c}}{1 + \left(\frac{v_{1A}}{c}\right)^2}\right)^2}} \\
 &= \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{v_{1A}}{c}\right)^2}}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{v_{1A}}{c}\right)^2\right]^2}} = \sqrt{\frac{1}{1 - \left(\frac{v_{1A}}{c}\right)^2}} = \gamma_{1A} \quad (7.17)
 \end{aligned}$$

Dies bedeutet, dass bei uneingeschränkter Verwendung der relativistischen Geschwindigkeitsaddition der Impuls nach dem Zusammenstoß um den Faktor γ_{1A} niedriger sein muss als vom Prinzip der Impulserhaltung gefordert.

b) Energie

Die Gleichung Gl. (7.11) wird modifiziert zu

$$C_E \cdot 2(\gamma_{3B} - 1) = (\gamma_{2B} - 1) - 2(\gamma_{1A} - 1) \quad (7.20)$$

Mit $v_{3B} = v_{1A}$ folgt

$$C_E = \frac{(\gamma_{2B} - 1)}{2(\gamma_{1A} - 1)} - 1 \quad (7.21)$$

Zur einfachen Lösung wird zunächst der Ausdruck $\gamma_{2B} - 1$ betrachtet. Dieser lässt sich mit Gl. (7.04) entwickeln zu

$$\gamma_{2B} - 1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\frac{2v_{1A}}{c}}{1 + \left(\frac{v_{1A}}{c}\right)^2}\right)^2}} - 1 \quad (7.22)$$

und daraus

$$\gamma_{2B} - 1 = \pm \frac{1 + \left(\frac{v_{1A}}{c}\right)^2}{1 - \left(\frac{v_{1A}}{c}\right)^2} - 1 = 2(\gamma_{1A}^2 - 1) \quad (7.23)$$

Bei dieser Kalkulation wurden für das Ergebnis aus der Wurzelberechnung nur positive Werte berücksichtigt, weil ein negativer Wert zu einem negativen Ergebnis für γ_{2B} führen würde, was physikalisch keinen Sinn ergibt. Eingesetzt in Gl. (7.21) folgt

$$C_E = \frac{2(\gamma_{1A}^2 - 1)}{2(\gamma_{1A} - 1)} - 1 \quad (7.24)$$

$$C_E = \frac{(\gamma_{1A} + 1)(\gamma_{1A} - 1)}{(\gamma_{1A} - 1)} - 1 = \gamma_{1A} \quad (7.25)$$

Damit ergibt sich auch hier der gleiche Faktor wie bei der Betrachtung des Impulses.

7.1.5 Abschließender Ansatz zur Berechnung

Zunächst sollen die bisher gewonnenen Erkenntnisse zusammengefasst und dann bewertet werden. Führt man bei gleichbleibender Masse vor und nach einem nichtelastischen Stoß (das bedeutet $m_3 = m_1 + m_2$; $\Delta m_3 = 0$) mittels Impuls- und Energieerhaltung Berechnungen durch, so weichen die entstehenden Ergebnisse für die Geschwindigkeit v_3 nach dem Stoß untereinander ab und sind darüber hinaus auch beide verschieden von den Werten der relativistischen Geschwindigkeitsaddition. Die errechneten Werte für die Geschwindigkeit des Verbunds v_3 sind dabei um unterschiedliche Werte höher als sie sich aus der relativistischen Geschwindigkeitsaddition ergeben.

Damit ist das Konzept der einfachen Massenaddition keine Option, da hierbei die grundlegenden Prinzipien der Energie- und/oder der Impulserhaltung verletzt werden. Wird allerdings der Ansatz aus Gleichung Gl. (7.10) zur vollständigen Umwandlung der kinetischen Energie in Masse verwendet, dann ergibt sich für diesen Fall mit $m_1 = m_2 = m$

$$\Delta m_3 = \frac{E_{1A} + E_{2A}}{c^2} = 2m(\gamma_{1A} - 1) \quad (7.30)$$

für die sich in Masse umwandelnde kinetische Energie Δm_3 (vgl. Gl. (7.04)). Dies auf die Impulsbeziehung angewendet bleibt Gl. (7.07) vor der Verbindung ohne Veränderung

$$p_{2B} = m\gamma_{2B}v_{2B} \quad (7.07)$$

Nach dem Stoß ändert sich jedoch Gl. (7.09) jedoch zu

$$p_{3B} = 2m\gamma_{3B}v_{3B} \Rightarrow p_{3B} = m_3\gamma_{3B}v_{3B} \quad (7.31)$$

Dies führt wegen $v_{1A} = v_{3B}$ aus der relativistischen Geschwindigkeitsaddition zu

$$p_{3B} = [2m(\gamma_{1A} - 1) + 2m]\gamma_{3B}v_{3B} = 2m\gamma_{3B}^2v_{3B} \quad (7.32)$$

Die in Umkehrung der bekannten Vorgänge beim Partikelzerfall stattfindende Umwandlung von Energie in Masse kann als „negativer Massendefekt“ bezeichnet werden. Das Ergebnis entspricht genau dem Wert der gesuchten fehlenden Größe bei Impuls und Energie und führt zu dem Schluss, dass bei der relativistischen Betrachtung des nicht elastischen Stoßes stets eine vollständige Massenerhöhung in der Größe der aufgenommenen potenziellen Energie des gebildeten Verbunds angenommen werden muss, um Widersprüche zu vermeiden.

Die vollständige Energie-Masse-Umwandlung ist im atomaren Bereich nachvollziehbar, bei makroskopischen Körpern entspricht dies jedoch nicht der allgemeinen Anschauung, z. B. bei der Erzeugung von Wärme. In diesem Fall ist aber aufgrund der Definition der Wärme – mit steigendem Wärmeinhalt erhöht sich die Geschwindigkeit der im Körper vorhandenen Masseteilchen – der Energieanstieg durch die relativistische Betrachtung der Oszillationsgeschwindigkeiten der beteiligten Atome oder Moleküle gegeben. Wird dieser Themenkomplex in der Literatur behandelt, so wird meistens die Umwandlung von kinetischer Energie in Masse vorausgesetzt und dann über die Gleichungen bewiesen, z. B. [47]. Der hier dargestellte Ansatz hat aber den Vorteil, dass sich die vollständige Umwandlung der potenziellen Energie in Masse klar aus den Erhaltungssätzen für Energie und Impuls ableiten lässt.

7.2 Partikel-Spaltungs-Relationen bei relativistischer Betrachtung

Wie bereits ausgeführt, handelt es sich beim Partikelzerfall formal gesehen um die Umkehrung der Gegebenheiten beim nicht elastischen Stoß (Kap. 7.1). Da die mathematischen Zusammenhänge direkt vergleichbar sind soll hier auf eine erneute Darstellung verzichtet werden. Schwerpunkt ist stattdessen die Betrachtung der Verhältnisse in beliebigen Raumrichtungen sowie zusätzlich die Bedingungen, wenn die Energieabfuhr nicht über die kinetische Energie der gebildeten Teilchen, sondern durch Strahlung erfolgt.

Um Verwechslungen zu vermeiden, wird grundsätzlich festgelegt, dass das zerfallende Partikel mit Index 1 gekennzeichnet wird, entstehende Zerfallsprodukte mit Index 3 und 4 (und ggf. weiter steigend). Ergebnisse für einen mitbewegten Beobachter werden mit f' gekennzeichnet, ist dieser nicht bewegt mit f (ohne Markierung).

7.2.1 Allgemeine Darstellung des Zerfalls in 2 Partikel

Zur Darstellung der Vorgänge in beliebigen Raumrichtungen wird auf das Verfahren zur Bestimmung der Aberration zurückgegriffen, dass bereits in Kap. 2.3 beschrieben wurde. Die dabei geltenden geometrischen Abhängigkeiten sind in Abb. 7.2 wiedergegeben. Die Darstellungen sind vollständig vergleichbar und die Berechnungen sollen daher nicht wiederholt werden. Der einzige Unterschied ergibt sich bezüglich Gl. (2.43), in der das Verhältnis der Geschwindigkeit des bewegten Systems mit der Lichtgeschwindigkeit ins Verhältnis gesetzt wurde. Diese wird ersetzt durch

$$\text{Gl. (2.43): } \frac{b}{v} = \frac{d}{c} \quad \Rightarrow \quad \frac{b}{v_1} = \frac{d}{v_3} \quad (7.40)$$

wobei v_1 die Geschwindigkeit des bewegten Systems und v_3 die des Partikels 3 ist (die im Folgenden dargestellten Gleichungen gelten analog auch für Partikel 4). Die Geschwindigkeit v_3 wird berechnet entsprechend Gl. (4.20)

$$v_3 = \frac{\sqrt{v_1^2 + v_3'^2 + 2v_1v_3' \cos\alpha_3' - \left(\frac{v_1v_3' \sin\alpha_3'}{c}\right)^2}}{1 + \frac{v_1v_3' \cos\alpha_3'}{c^2}} \quad (7.41)$$

wobei in diesem Fall v_3' die Geschwindigkeit des Partikels bezogen auf das bewegte System darstellt und v_3 dessen Geschwindigkeit aus Sicht des unbewegten Beobachters. Die Berechnung führt zu folgendem Ergebnis [vgl. hierzu auch Gl. (2.48)]:

$$\tan\alpha_3' = \pm \frac{\sin\alpha_3}{\gamma \left(\cos\alpha_3 - \frac{v_1}{v_3} \right)} \quad (7.42)$$

Hierbei stellt α_3 den Winkel dar, den ein nicht bewegter Beobachter für die Bewegung des sich entfernenden Partikels gegenüber seinem System feststellt, während α_3' der Winkel des gleichen Partikels aus Sicht des bewegten Beobachters ist. Bei gegebenem Winkel von α_3' lässt sich auf einfachem Wege der Wert für α_3 berechnen. Hierzu ist lediglich das Vorzeichen zu wechseln (Details s. Kap. 2.3.4) und es ergibt sich

7. Nicht elastische Prozesse

$$\tan \alpha_3 = \pm \frac{\sin \alpha'_3}{\gamma \left(\cos \alpha'_3 + \frac{v_1}{v'_3} \right)} \quad (7.43)$$

Die Gültigkeit kann auch leicht mittels numerischen Vergleichs gezeigt werden. In der Tabelle Tab. (7.1a) sind beispielhaft einige Winkelberechnungen für unterschiedliche Geschwindigkeiten v_1 und v'_3 dargestellt.

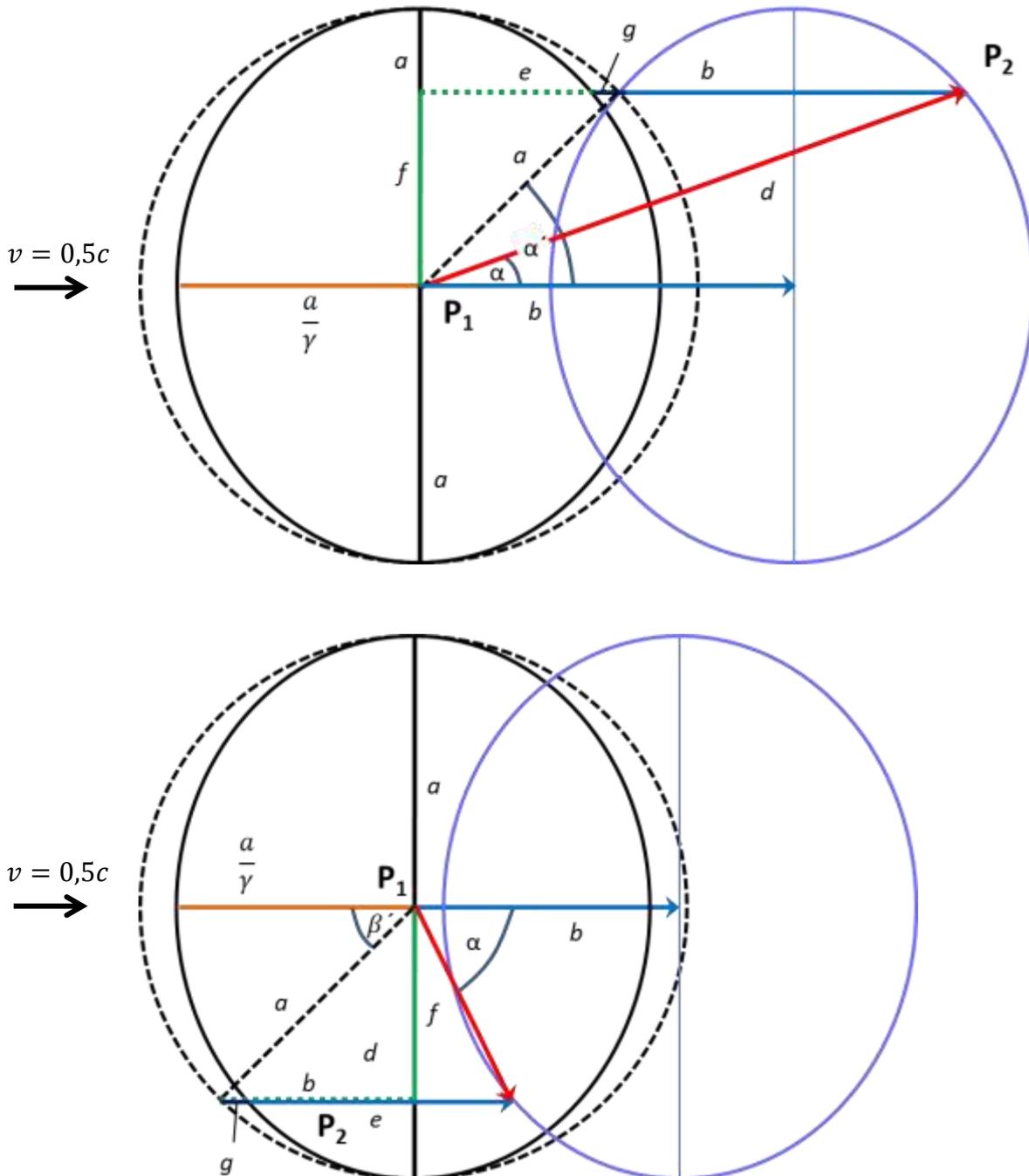


Abb. 7.2: Definition der Größen zur Bestimmung des subjektiven Ausgangswinkels bei einem bewegten Beobachter ($v_1 = 0,5c$, $\alpha'_3 = 45^\circ$, $\alpha'_4 = -135^\circ$)
 a) Signalausgang in Bewegungsrichtung, $\alpha_3 = 19,73^\circ$
 b) Signalausgang zurück, $\alpha_4 = -64,44^\circ$

7.2 Partikel-Spaltungs-Relationen bei relativistischer Betrachtung

α'_3	v_3	α_3	\tilde{p}_3	\tilde{p}_{3X}	\tilde{p}_{3Y}	α_4	v_4	
0	0,57143	0	0,69631	0,69631	0	-180	0,42105	$v_1=$
45	0,55439	37,80	0,66612	0,52636	0,40825	-125,78	0,44953	0,1
90	0,50744	78,63	0,58890	0,11605	0,57735	-78,63	0,50744	$v'_3=$
135	0,44953	125,78	0,50324	-0,29425	0,40825	-37,80	0,55439	0,5
180	0,42105	180,00	0,46421	-0,46421	0	0	0,57143	
α'_3	\tilde{p}_4	\tilde{p}_{4X}	\tilde{p}_{4Y}	$\Sigma\tilde{p}_X$	$\Sigma\tilde{p}_Y$	$\tilde{E}_{kin,3}$	$\tilde{E}_{kin,4}$	$\Sigma\tilde{E}_{kin}$
0	0,46421	-0,46421	0	0,23210	0	0,218544	0,102492	0,321035
45	0,50324	-0,29425	-0,4085	0,23210	0	0,201548	0,119487	0,321035
90	0,58890	0,11605	-0,57735	0,23210	0	0,160518	0,160518	0,321035
135	0,66612	0,52636	-0,40825	0,23210	0	0,119487	0,201548	0,321035
180	0,69631	0,69631	0	0,23210	0	0,102492	0,218544	0,321035
α'_3	v_3	α_3	\tilde{p}_3	\tilde{p}_{3X}	\tilde{p}_{3Y}	α_4	v_4	
0	0,8	0	1,33333	1,33333	0,00000	-90	0,00000	$v_1=$
45	0,77059	19,73	1,20908	1,13807	0,40825	-64,44	0,41229	0,5
90	0,66144	40,89	0,88192	0,66667	0,57735	-40,89	0,66144	$v'_3=$
135	0,41229	64,44	0,45254	0,19526	0,40825	-19,73	0,77059	0,5
180	0	90	0	0	0	0	0,80000	
α'_3	\tilde{p}_4	\tilde{p}_{4X}	\tilde{p}_{4Y}	$\Sigma\tilde{p}_X$	$\Sigma\tilde{p}_Y$	$\tilde{E}_{kin,3}$	$\tilde{E}_{kin,4}$	$\Sigma\tilde{E}_{kin}$
0	0	0	0	1,33333	0	0,666667	0,000000	0,666667
45	0,45254	0,19526	-0,40825	1,33333	0	0,569036	0,097631	0,666667
90	0,88192	0,66667	-0,57735	1,33333	0	0,333333	0,333333	0,666667
135	1,20908	1,13807	-0,40825	1,33333	0	0,097631	0,569036	0,666667
180	1,33333	1,33333	0	1,33333	0	0,000000	0,666667	0,666667
α'_3	v_3	α_3	\tilde{p}_3	\tilde{p}_{3X}	\tilde{p}_{3Y}	α_4	v_4	
0	0,57143	0	0,69631	0,69631	0	0	0,42105	$v_1=$
45	0,55439	6,12	0,66612	0,66232	0,07107	-8,12	0,44953	0,5
90	0,50744	9,83	0,58890	0,58026	0,10050	-9,83	0,50744	$v'_3=$
135	0,44953	8,12	0,50324	0,49820	0,07107	-6,12	0,55439	0,1
180	0,42105	0	0,46421	0,46421	0	0	0,57143	
α'_3	\tilde{p}_4	\tilde{p}_{4X}	\tilde{p}_{4Y}	$\Sigma\tilde{p}_X$	$\Sigma\tilde{p}_Y$	$\tilde{E}_{kin,3}$	$\tilde{E}_{kin,4}$	$\Sigma\tilde{E}_{kin}$
0	0,46421	0,46421	0	1,16052	0	0,218544	0,102492	0,321035
45	0,50324	0,49820	-0,07107	1,16052	0	0,201548	0,119487	0,321035
90	0,58890	0,58026	-0,10050	1,16052	0	0,160518	0,160518	0,321035
135	0,66612	0,66232	-0,07107	1,16052	0	0,119487	0,201548	0,321035
180	0,69631	0,69631	0	1,16052	0	0,102492	0,218544	0,321035

Tab. 7.1a: Berechnungen für Impuls und kinetische Energie im bewegten System.
 Grau unterlegte Werte für Winkel: Approximiert
 Felder mit Rahmen: 180°-Winkel.
 Formeln und Dimensionen: vgl. Tabelle 7.1b und Text

7.2 Partikel-Spaltungs-Relationen bei relativistischer Betrachtung

Es wird davon ausgegangen, dass ein Teilchen in 2 gleich große Partikel zerfällt, von dem eines sich in einem beliebigen Winkel α'_3 entfernt. Das zweite weist dann aus Symmetriegründen den Winkel $\alpha'_4 = \alpha'_3 - 180^\circ$ auf. Für diese Partikel wurden dann die Winkel α_3 und α_4 und die zugehörigen Geschwindigkeiten v_3 und v_4 bestimmt. In einem zweiten Schritt wurden dann die Werte für den Impuls gemäß

$$p_3 = \gamma_1 m v_3 \quad \text{bzw.} \quad p_4 = \gamma_1 m v_4 \quad (7.44)$$

berechnet. Anschließend wurden die Anteile in Bewegungsrichtung (x) und senkrecht dazu (y) gemäß den Beziehungen

$$p_x = p \cdot \cos(\alpha) \quad (7.45)$$

$$p_y = p \cdot \sin(\alpha) \quad (7.46)$$

ermittelt. Werden diese Werte für die Winkel α_3 und α_4 aufaddiert, so ergeben sich in x -Richtung stets die gleichen Ergebnisse, in y -Richtung heben sie sich auf. Außerdem wurden die Werte für die kinetische Energie ermittelt, und zwar für Partikel 3 gemäß

$$E_{kin,3} = (\gamma_3 - 1) m c^2 \quad (7.47)$$

und für Partikel 4

$$E_{kin,4} = (\gamma_4 - 1) m c^2 \quad (7.48)$$

Die Summe dieser Werte führt für alle Winkel zu den gleichen Ergebnissen. Es konnte damit gezeigt werden, dass für den Zerfall in 2 gleichartige Produkte die Werte für Impuls und kinetische Energie in allen Fällen für einen nicht bewegten und einen bewegten Beobachter zu den gleichen Ergebnissen führen und es damit nicht möglich ist, innerhalb eines Systems auf den Bewegungszustand zu schließen.

7.2.2 Der Zerfall in 2 Photonen

Aus experimentellen Beobachtungen ist bekannt, dass ein Teilchen ohne Hinterlassung von Materieresten vollständig in Photonen zerfallen kann. So ist das π^0 -Pion ein extrem unstabiles Teilchen mit einer Lebensdauer von ungefähr 10^{-18} s mit der Besonderheit, dass es mit fast 99%iger Wahrscheinlichkeit in 2 Photonen zerfällt. Wird unterstellt, dass ein solcher Zerfall im Zustand absoluter Ruhe stattfindet, so ergibt sich für die Energie

$$E = m_0 c^2 = h f_3 + h f_4 \quad (7.50)$$

wobei h das Planck'sche Wirkungsquantum und f_3 sowie f_4 die Frequenzen der Photonen darstellen. Der Impuls eines Photons ist

$$\vec{p} = h \frac{f}{c} \vec{e} \quad (7.51)$$

mit \vec{e} als Einheitsvektor in Bewegungsrichtung. Wegen der Erhaltungssätze von Impuls und Energie sind die Frequenzen beider Photonen gleich und die Abstrahlung erfolgt senkrecht zueinander. Der auftretende Gesamtimpuls ist vorher und nachher gleich Null.

7. Nicht elastische Prozesse

Stellt dagegen ein Beobachter für das Teilchen vor dem Zerfall eine Bewegung v_1 fest so ist wegen der relativistischen Massenerhöhung die Gesamtenergie

$$E = \gamma_1 m_0 c^2 \quad (7.52)$$

Nach dem Zerfall müssen die abgestrahlten Photonen die Gesamtenergie und den Impuls des Teilchens aufnehmen. Es ergibt sich nach dem Zerfall für die Energie

$$E = \gamma_1 h f_3 + \gamma_1 h f_4 \quad (7.53)$$

und für den Impuls eines Photons

$$\vec{p} = \gamma_1 h \frac{f}{c} \vec{e} \quad (7.54)$$

Werden die Beziehungen nun bezüglich ihrer Anteile in Bewegungsrichtung untersucht, so muss aus Sicht eines ruhenden Beobachters die kinetische Energie des Teilchens sowie dessen Impuls ebenfalls von den erzeugten Photonen aufgenommen werden. Es ergibt sich für die Energie folgende Beziehung

$$\gamma_1 m_0 c^2 = \gamma_1 h f_3 + \gamma_1 h f_4 \quad (7.55)$$

und für den Impuls *in Bewegungsrichtung*

$$\gamma_1 m_0 v_1 = \gamma_1 h \frac{f_3}{c} - \gamma_1 h \frac{f_4}{c} \quad (7.56)$$

wobei für f_3 eine Abstrahlung in Bewegungsrichtung (positiv) und für f_4 entgegengesetzt dazu (negativ) angenommen wurde. Aus Subtraktion bzw. Addition der Gleichungen Gl. (7.55) und (7.56) ergeben sich für die Frequenzen

$$f_3 = \frac{m_0 (c^2 + v_1 c)}{2h} \quad (7.57)$$

$$f_4 = \frac{m_0 (c^2 - v_1 c)}{2h} \quad (7.58)$$

mit

$$\frac{f_3}{f_4} = \frac{c + v_1}{c - v_1} \quad (7.59)$$

Dieses Verhältnis entspricht genau dem makroskopisch zu beobachtenden Verhalten, dass in Kap. 8 beschrieben wird.

Zur Ableitung der Zusammenhänge für beliebige Raumrichtungen sind zunächst die geometrischen Verhältnisse für Sender und Empfänger zu ermitteln. In Abb. 7.3 ist dargestellt, wie Teilnehmer A zum Zeitpunkt A_1 und dann A_2 ein Signal aussendet. Dies wird in Abhängigkeit vom Abstand zu B und von der Geschwindigkeit zu unterschiedlichen Winkeln relativ zur Bewegungsrichtung führen. Zur Vereinfachung wird angenommen, dass der nicht bewegte Empfänger B weit entfernt und der Abstand zwischen zwei Signalen relativ kurz ist und somit $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ gesetzt werden kann.

Der bewegte Sender A wird seine Signale im Abstand

$$\Delta t_A = \gamma \Delta t_0 \quad (7.60)$$

7.2 Partikel-Spaltungs-Relationen bei relativistischer Betrachtung

im Vergleich zu einem unbewegten Beobachter aussenden. Empfänger B wird neben dieser Verlängerung wegen der Zeitdilatation auch einen geometrischen Einfluss feststellen, da sich der Sender zwischen den Impulsen seiner Position angenähert oder entfernt hat. In Summe ergibt dies

$$\Delta t_B = \gamma \Delta t_0 \left(1 - \frac{v}{c} \cos(\alpha) \right) \quad (7.61)$$

Damit folgt für die Frequenzen, die von Empfänger B aufgenommen werden

$$f_B = \frac{f_0}{\gamma \left(1 - \frac{v}{c} \cos(\alpha) \right)} \quad (7.62)$$

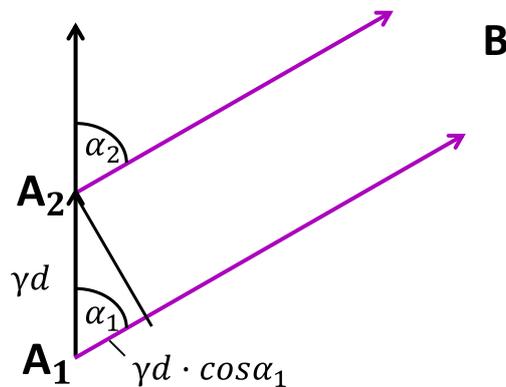


Fig. 7.3: Skizze zum Strahlenverlauf

Für einen abschließenden Vergleich werden Berechnungen für verschieden Ausgangswinkel der Photonen durchgeführt. Hierzu sind in Tab. 7.2 Winkel für α'_3 (aus Sicht des bewegten Beobachters) definiert; die zugehörigen Winkel des zweiten Photons unterscheiden sich genau um 180° , d. h. es gilt $\alpha'_4 = \alpha'_3 - 180^\circ$. Daraus müssen zunächst die Winkel aus Sicht eines ruhenden Beobachters B berechnet werden; hierzu werden Gleichungen aus Kap. 2.3 benutzt und nach α_3 aufgelöst. Hieraus werden dann die zugehörigen Frequenzen berechnet, anschließend wird der Impuls in x - und y -Richtung bestimmt (\cos bzw. \sin des Winkels entsprechend Gl. (7.45) und (7.46) aus Kap. 7.2.1). Abschließend wird noch für jeden Winkel die Gesamtenergie berechnet, die beim Zerfall freigesetzt wird.

Der Ausgangswert für f_0 wurde mit 1 eingesetzt. Zur Erhöhung der Übersichtlichkeit sind die Werte für Impuls und Energie als \tilde{p} und \tilde{E} wieder in normierter Form angegeben und besitzen die Dimension 1. Die genauen Definitionen und zu den sich ergebenden Dimensionen sind in Tabelle 7.2b zusammengefasst.

Die Summe der Werte für den Impuls in x -Richtung sowie die Energie haben stets den gleichen Wert und entsprechen den erwarteten Ergebnissen; die Impulswerte in y -Richtung heben sich auf. Außerdem lässt sich auf einfache Weise zeigen, dass die Ergebnisse für den Winkel $\alpha'_3 = 0$ exakt der Gleichung (7.59) entsprechen, die für den einfachen Fall der Abstrahlung in Bewegungsrichtung und entgegengesetzt dazu abgeleitet wurde. Es treten demnach keine Unterschiede auf, ob Experimente im ruhenden oder bewegten Zustand

7. Nicht elastische Prozesse

durchgeführt werden und es sind somit auch hier keine Verletzungen des Relativitätsprinzips feststellbar.

α'_3	α_3	α_4	f_3	f_4	\tilde{p}_{3X}	\tilde{p}_{4X}	$\Sigma\tilde{p}_X$	\tilde{p}_{3Y}	\tilde{p}_{4Y}	$\Sigma\tilde{p}_Y$	\tilde{E}
0	0	-180	1,732	0,577	0,866	-0,289	0,577	0	0	0	2,309
15	8,69	-154,31	1,712	0,597	0,846	-0,269	0,577	0,129	-0,129	0	2,309
30	17,59	-130,21	1,655	0,655	0,789	-0,211	0,577	0,250	-0,250	0	2,309
45	26,90	-108,69	1,563	0,746	0,697	-0,120	0,577	0,354	-0,354	0	2,309
60	36,87	-90,00	1,443	0,866	0,577	0,000	0,577	0,433	-0,433	0	2,309
75	47,79	-73,92	1,304	1,005	0,438	0,139	0,577	0,483	-0,483	0	2,309
90	60,00	-60,00	1,155	1,155	0,289	0,289	0,577	1	-1	0	2,309
105	73,92	-47,79	1,005	1,304	0,139	0,438	0,577	0,483	-0,483	0	2,309
120	90	-36,87	0,866	1,443	0,000	0,577	0,577	0,433	-0,433	0	2,309
135	108,69	-26,90	0,746	1,563	-0,120	0,697	0,577	0,354	-0,354	0	2,309
150	130,21	-17,59	0,655	1,655	-0,211	0,789	0,577	0,250	-0,250	0	2,309
165	154,31	-8,69	0,597	1,712	-0,269	0,846	0,577	0,129	-0,129	0	2,309
180	180	0	0,577	1,732	-0,289	0,866	0,577	0	0	0	2,309

Tab 7.2a: Berechnungen für Winkel, Impuls (Bewegungsrichtung: x, senkrecht dazu: y), Energie. Formeln und Dimensionen vgl. Tab. 7.2b

$\alpha_3 = 2 \cdot \arctan \left[\left(\frac{c-v}{c+v} \right)^{1/2} \tan \left(\frac{\alpha'_3}{2} \right) \right] \cdot \frac{180}{\pi}$		Gl. aus Tab. 2.4, No. 4	[°]
$\alpha_4 = 2 \cdot \arctan \left[\left(\frac{c-v}{c+v} \right)^{1/2} \tan \left(\frac{\pi - \alpha'_3}{2} \right) \right] \cdot \frac{180}{\pi}$		Gl. aus Tab. 2.4, No. 4	[°]
$f_3 = \frac{f_0}{\gamma \left(1 - \frac{v}{c} \cos(\alpha_3) \right)}$	[s ⁻¹]	$f_4 = \frac{f_0}{\gamma \left(1 + \frac{v}{c} \cos(\alpha_4) \right)}$	[s ⁻¹]
$\tilde{p}_{3X} = \frac{p_{3X}}{mc} = \frac{v}{c} f_3 \cos(\alpha_3)$	[-]	$\tilde{p}_{4X} = \frac{p_{4X}}{mc} = \frac{v}{c} f_4 \cos(\alpha_4)$	[-]
$\Sigma\tilde{p}_X = \tilde{p}_{3X} + \tilde{p}_{4X}$	[-]		
$\tilde{p}_{3Y} = \frac{p_{3Y}}{mc} = \frac{v}{c} f_3 \sin(\alpha_3)$	[-]	$\tilde{p}_{4Y} = \frac{p_{4Y}}{mc} = \frac{v}{c} f_4 \sin(\alpha_4)$	[-]
$\Sigma\tilde{p}_Y = \tilde{p}_{3Y} + \tilde{p}_{4Y}$	[-]	$\tilde{E} = \frac{E}{\gamma h} = f_3 + f_4$	[-]

Tab. 7.2b Formeln und Dimensionen benutzt für Tabelle 7.2a