

Anlage A: Relativistischer elastischer Stoß

In dieser Anlage werden numerische Verfahren für Berechnungen des relativistischen elastischen Stoßes dargestellt (vgl. Kap. 6.3). Dazu werden die Gleichungen

$$p = m_1 \gamma_1 v_1 + m_2 \gamma_2 v_2 = m_1 \gamma_3 v_3 + m_2 \gamma_4 v_4 \quad (\text{A.01})$$

$$\frac{E_0}{c^2} = (\gamma_1 - 1)m_1 + (\gamma_2 - 1)m_2 = (\gamma_3 - 1)m_1 + (\gamma_4 - 1)m_2 \quad (\text{A.02})$$

verwendet. Gl. (A.02) lässt sich umformen zu

$$\gamma_4 = \frac{\frac{E_0}{c^2} - (\gamma_3 - 1)m_1}{m_2} + 1 \quad (\text{A.03})$$

mit

$$v_4 = \pm c \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma_4^2}} \quad (\text{A.04})$$

Werden nun Gl. (A.03) und Gl. (A.04) in Gl. (A.01) eingesetzt so ergibt sich

$$f(v_3) = m_1 \gamma_3 v_3 \pm c \left(\frac{E_0}{c^2} - (\gamma_3 - 1)m_1 + m_2 \right) \left[1 - \left(\frac{\frac{E_0}{c^2} - (\gamma_3 - 1)m_1}{m_2} + 1 \right)^{-2} \right]^{1/2} \quad (\text{A.05})$$

Dieser Ausdruck ist nur noch von v_3 und den bekannten Ausgangswerten für v_1 und v_2 abhängig. Hieraus lassen sich die Werte für v_3 und daraus v_4 mittels Verwendung des Verfahrens der Bisektion ermitteln (vgl. hierzu auch Verfahrensvergleiche in Anlage D). Dazu werden zunächst geeignete Startwerte $(v_{3+})_0$ und $(v_{3-})_0$ bestimmt, für die gilt:

$$f(v_{3+})_0 > p \quad (\text{A.06})$$

$$f(v_{3-})_0 < p \quad (\text{A.07})$$

Die Funktion $f(v_3)$ muss im Intervall $[(v_{3-})_0; (v_{3+})_0]$ stetig und differenzierbar sein, außerdem ist $f'(v_3) \neq 0$ gefordert, d. h. es darf im Definitionsintervall keine Minima oder Maxima geben, da sonst keine eindeutige Lösung existiert. Es wird nun der Mittelwert gebildet

$$(v_3)_1 = \frac{(v_{3+})_0 + (v_{3-})_0}{2} \quad (\text{A.08})$$

und $f(v_3)_1$ gemäß Gl. (A.05) berechnet. Es gelten dann die folgenden Festlegungen:

$$f(v_3)_1 > p \Rightarrow \begin{cases} (v_{3+})_1 = (v_3)_1 \\ (v_{3-})_1 = (v_{3-})_0 \end{cases} \quad (\text{A.09})$$

$$f(v_3)_1 \leq p \Rightarrow \begin{cases} (v_{3+})_1 = (v_{3+})_0 \\ (v_{3-})_1 = (v_3)_1 \end{cases} \quad (\text{A.10})$$

Diese Berechnung wird mit steigendem Index K so lange wiederholt, bis die gewünschte Genauigkeit erreicht wird. Bedingt durch das Auftreten des Ausdrucks \pm in den Gleichungen Gl. (A.04) und Gl. (A.05), der sich durch die Auflösung der Wurzel ergibt, treten während der Berechnung und abschließend bei der Bestimmung von v_4 jeweils zwei unterschiedliche Ergebnisse auf, die über eine Plausibilitätsbetrachtung der tatsächlichen Situation angepasst werden müssen.

Wird für die Berechnung eine einfache Tabellenkalkulation verwendet (vgl. Kap. A.2), so sind aufgrund der zuvor diskutierten Randbedingungen die Eingabeparameter eingeschränkt. Für die Berechnungen müssen die Startbedingungen so gewählt werden, dass die Werte für v_1 in allen Fällen positiv sind. Außerdem wird vorausgesetzt, dass durch geeignete Indexwahl die Werte von v_1 stets größer als v_2 und die Werte für den berechneten Impuls in Gl. (A.01) $p > 0$ sind. Falls die tatsächlichen Vorgabewerte von diesen Voraussetzungen abweichen, sind Anpassungen erforderlich deren Definition im Folgenden dargestellt sind.

A.1 Programmablauf des Kalkulationsprozesses

Nachfolgend wird beschrieben, welche Prozessschritte ein Programm ausführen muss, um die erforderlichen Berechnungen durchzuführen (vgl. Abb. A.1). Um eine uneingeschränkte Auswahl der Ausgangsparameter zu gewährleisten, wird zunächst deren Bestimmung über das Unterprogramm „Parameter Input“ und nach Abschluss der Berechnungen die Rückumwandlung mittels Unterprogramm „Parameter Output“ durchgeführt (Abb. A.2).

Die Ermittlung der Inputwerte wird durch folgende Kriterien bestimmt:

1. Bei der Betrachtung der Geschwindigkeiten der Körper mit den Massen m_1 und m_2 ist die Bedingung $v_1 > v_2$ erforderlich. Dies ergibt sich aus der Tatsache, dass bei der Berechnung zunächst die Geschwindigkeit v_3 (des Körpers mit der Masse m_1 nach dem Stoß) ermittelt wird; bei Werten $v_1 < v_2$ würde sich die Masse m_1 langsamer als m_2 bewegen und es kommt nicht zum Ereignis.
2. Weiterhin gelten die Randbedingungen $v_1 > 0$ und $p > 0$. Dies wird durch die Berechnungen im Programmablauf gefordert, u. a. weil bei der Nutzung eines Wurzelausdrucks nur das positive Ergebnis (statt plus und minus zu betrachten) verwendet wird.

Diese zunächst starken Einschränkungen für die Auswertungen stellen jedoch keine Begrenzung dar, weil es folgende allgemeine Möglichkeiten zur Änderung der Ausgangsbedingungen gibt:

1. Die Vorzeichen für die Geschwindigkeiten v_1 und v_2 lassen sich beliebig festlegen, sofern beide Werte gleichzeitig geändert werden.
2. Der Index zwischen $v_1; m_1$ und $v_2; m_2$ lässt sich tauschen.

Anlage A: Relativistischer elastischer Stoß

Mit diesen Mitteln können alle beliebigen Kombinationen erfasst werden. An dieser Stelle wird zunächst der Fall $v_1 > 0$ betrachtet. Statt der theoretisch abzuleitenden $2^3 = 8$ Kombinationsmöglichkeiten aus den 3 Zusatzbedingungen $v_2 > 0$, $v_1 > v_2$ sowie $p > 0$ verbleiben nur insgesamt 4 Varianten. Dies ist auf folgende Sachverhalte zurückzuführen:

- Für den Fall $v_2 > 0$ ist in Kombination mit $v_1 > 0$ der aufaddierte Gesamtimpuls immer positiv und muss nicht betrachtet werden. Ein negativer Impuls kann nur dann auftreten, wenn die Geschwindigkeiten unterschiedliche Vorzeichen aufweisen.
- Für den Fall $v_1 > 0$ liegt beim Auftreten von $v_2 < 0$ offensichtlich immer die Bedingung $v_1 > v_2$ vor.

Diese Fälle müssen also nicht separat betrachtet werden. Die verbleibenden Varianten lassen sich folgendermaßen zusammenfassen:

Bedingung 1	Bedingung 2	Maßnahme	Code
$v_2 > 0$	$v_1 > v_2$	Keine Änderung	F1
$v_2 > 0$	$v_1 < v_2$	Indextausch	F2
$v_2 < 0$	$p > 0$	Keine Änderung	F1
$v_2 < 0$	$p < 0$	Index- und Vorzeichentausch	F4

Tab. A.1: Inputparameter in Abhängigkeit von den Randbedingungen für $v_1 > 0$

Für die Situation $v_1 < 0$ erfolgt die Festlegung in gleicher Form, nur dass zuvor ein genereller Vorzeichenwechsel berücksichtigt werden muss. Dabei ist zu beachten, dass nach einem Vorzeichentausch der Wert für den Impuls ebenfalls das Vorzeichen wechselt. Abschließend ergeben sich folgende Werte:

Bedingung 1	Bedingung 2	Maßnahme	Code
$v_2 > 0$	$p > 0$	Index- und Vorzeichentausch	F4
$v_2 > 0$	$p < 0$	Vorzeichentausch	F3
$v_2 < 0$	$v_1 < v_2$	Indextausch	F2
$v_2 < 0$	$v_1 > v_2$	Vorzeichentausch	F3

Tab. A.2: Inputparameter in Abhängigkeit von den Randbedingungen für $v_1 < 0$

Die so ermittelten Werte werden mit V_1, V_2, M_1, M_2 bezeichnet und für die weiteren Berechnungen genutzt. Auf diese Weise können alle möglichen Kombinationen für Masse und Geschwindigkeit abgedeckt werden. Nach Beendigung der Berechnungen werden die Ergebnisse für V_3, V_4, M_1, M_2 nach gleichem Schema entsprechend dem definierten Code in die Ausgangsdarstellung zurückverwandelt.

Es ist noch zu erwähnen, dass durch die Auswahl der Parameter die Ergebnisse für V_4 stets positive Werte aufweisen und erst durch die eventuell erforderliche Rückumwandlung negativ werden können. Dies ist wichtig, weil die Werte entsprechend Gl. (A.04) ermittelt werden und hier die Form

$$V_4 = + \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma_4^2}} \quad (\text{A. 11})$$

mit ausschließlich positivem Ergebnis annehmen.

Die auf diese Weise ermittelten Werte gestatten es, die für die Berechnungen erforderlichen Ausgangswerte für $(V_{3+})_0$ und $(V_{3-})_0$ auf einfache Weise festzulegen. Es lässt sich leicht zeigen, dass für alle Fälle die Bedingungen $(V_{3+})_0 = V_1$ sowie $(V_{3-})_0 = -V_1$ die Voraussetzungen erfüllen und stets zu verwertbaren Ergebnissen führen.

Für die weiteren Berechnungen wurde hier (wie auch in den anderen Fällen) das Verfahren der Bisektion gewählt. Für die Festlegung des Parameters zur Beendigung der Berechnungen ist hierbei die Möglichkeit gegeben, dass die Werte von $(v_3)_{K-1}$ und $(v_3)_K$ oder $(v_4)_{K-1}$ und $(v_4)_K$ miteinander verglichen werden und bei Gleichheit der Berechnungsvorgang abgebrochen wird. Entscheidet man sich jedoch für eine dieser Abfragen so kann die Situation auftreten, dass – wenn die Werte nahe Null sind – der andere noch nicht genau berechnet worden ist. Um dieser Problematik zu entgehen wurde die Tatsache genutzt, dass ab einer Anzahl von ca. 60 Iterationsschritten bei der hier verfügbaren Genauigkeit von 15 Stellen die mögliche Grenzgenauigkeit erreicht wird (vgl. Darstellung in Anlage D). Es wurde willkürlich eine Gesamtzahl von 80 Schritten festgelegt.

Alle erforderlichen Prozessschritte sind mit der Hilfe von Programmablaufplänen dargestellt, und zwar in Abb. A.1 für den generellen Ablauf und in Abb.A.2 für die beschriebenen Unterprogramme. Anschließend ist ein für die Berechnungen erstellter VBA-Programmcode (Abb. A.3) sowie die Zuordnung der hierbei verwendeten Formelzeichen (Tab. A.3) wiedergegeben.

Darauffolgend ist in Kap. A.2 ein einfaches Kalkulationsprogramm dargestellt, mit dem die gleichen Berechnungen vorgenommen werden können. Allerdings müssen hierbei die bereits erwähnten Randbedingungen $v_1 > v_2$, $v_1 > 0$ und $p > 0$ eingehalten oder gegebenenfalls manuell angepasst werden.

Wie bereits in Kapitel 6.3 erwähnt wurde, sind die Ergebnisse aus VBA-Programm und Tabellenkalkulation nicht völlig identisch, obwohl diese exakt dem gleichen Berechnungsschema folgen. Während dies bei großen Werten keine Rolle spielt, sind bei sehr kleinen Werten von v_1 Abweichungen feststellbar. Diese werden durch Rundungsfehler während der Berechnung verursacht, die auf die verschiedenen Verfahren unterschiedliche Auswirkungen haben. Hierdurch ist jedoch keine Beeinträchtigung der allgemeinen Aussage gegeben, dass beim elastischen relativistischen Stoß keine Effekte auftreten können, die Messungen zur Identifizierung eines absolut ruhenden Systems gestatten.

Wenn Fälle mit sehr geringen Geschwindigkeiten numerisch genauer untersucht werden sollen, müssen hier Rechnersysteme mit höherer Genauigkeit eingesetzt werden.

Anlage A: Relativistischer elastischer Stoß

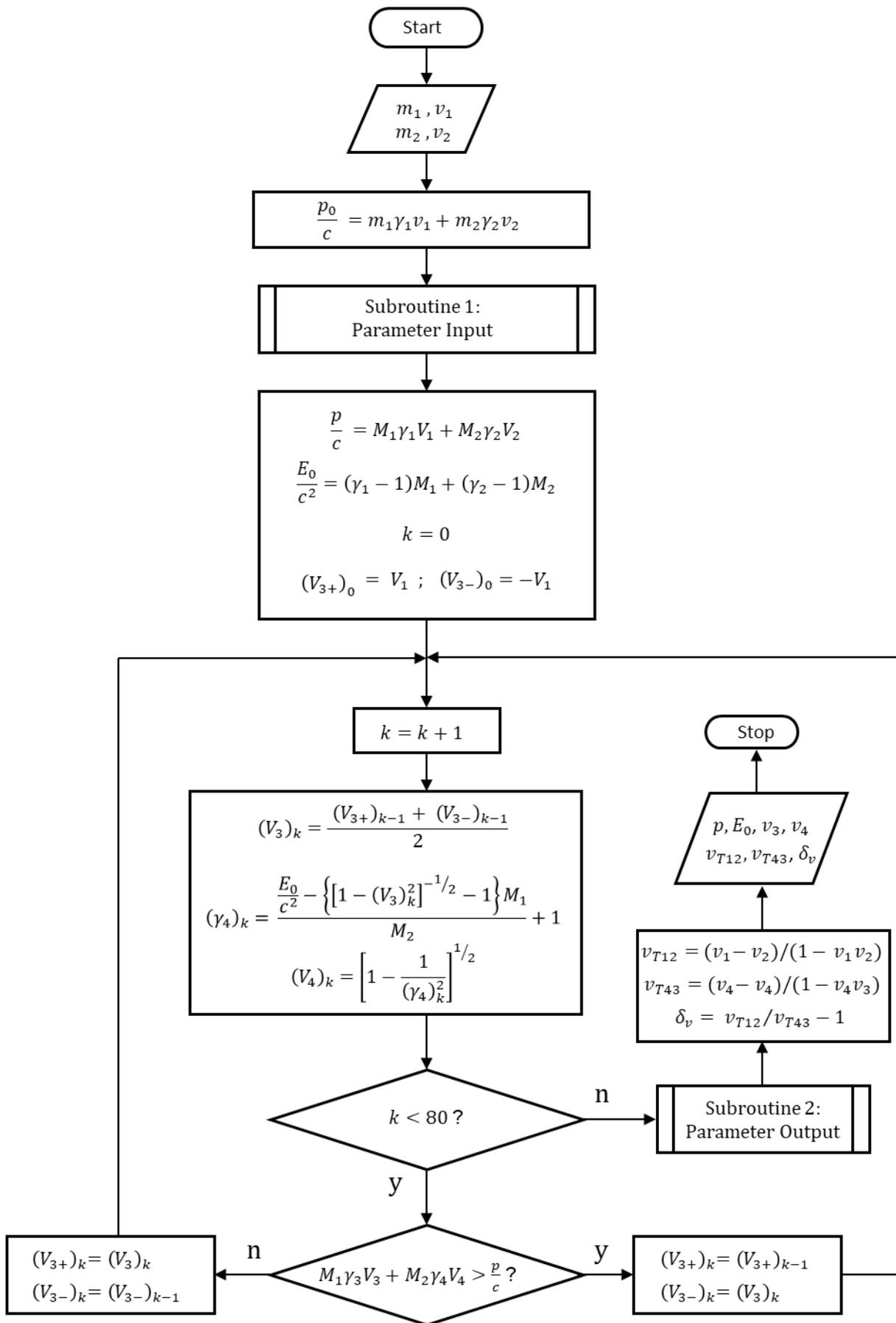


Abb. A.1: Programmablaufplan des Kalkulationsprozesses

Anlage A: Relativistischer elastischer Stoß

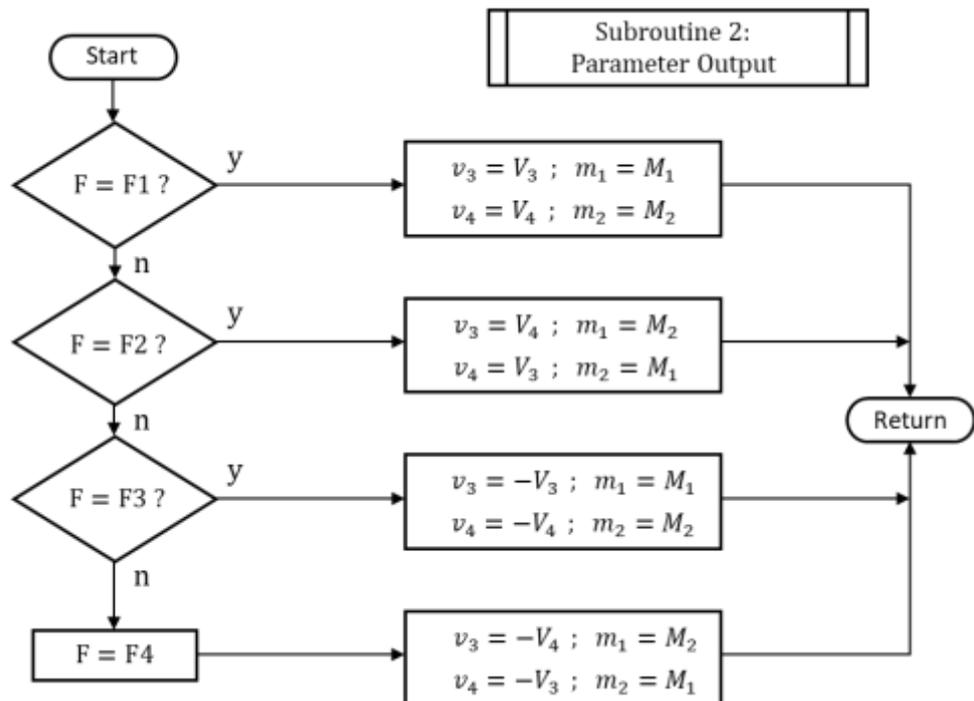
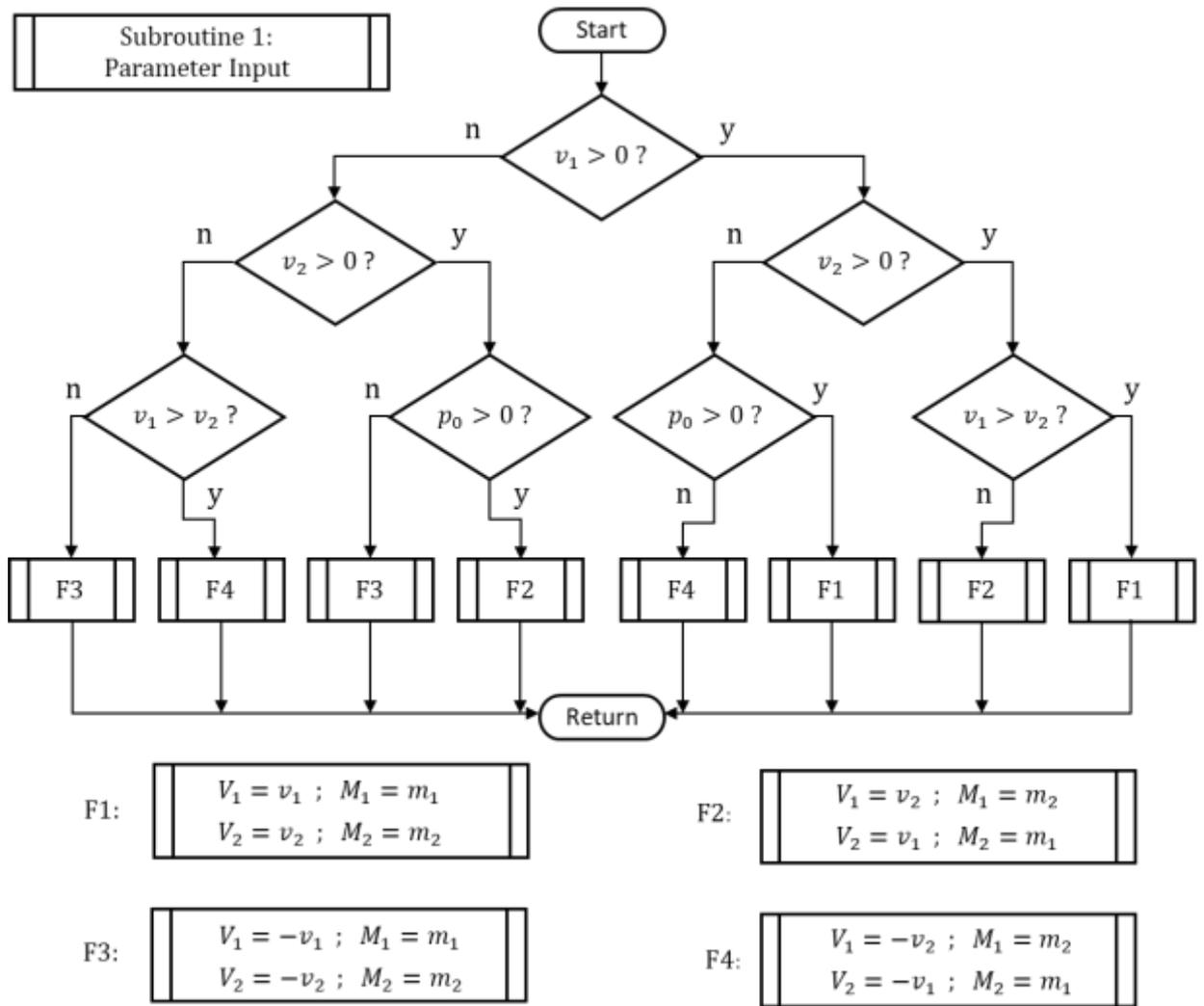


Abb. A.2: Unterprogramme zum Programmablaufplan in Abb. A.1

Anlage A: Relativistischer elastischer Stoß

Wert	VBA-Code	Wert	VBA-Code	Wert	VBA-Code
v_1	v1	v_2	v2	vc_1	vc1
vc_1	vc2	v_3	v3	vc_3	vc3
vc_{3-}	vc3m	vc_{3+}	vc3p	v_4	v4
vc_4	vc4	m_1	m1	mc_1	mc1
$v_T(v_1, v_2)$	vt12	$v_T(v_4, v_3)$	vt43	δ_v	Dv
m_2	m2	mc_2	mc2	p_0	p0
p	pc0	E_0	E0	γ_4	Ga4

Tab. A.3: Formelzeichen und dafür genutzte VBA-Codes

```

Sub A()
Dim v1, v2, vc1, vc2, v3, vc3, vc3m, vc3p, v4, vc4, vt12, vt43, Dv, m1,
mc1, m2, mc2, p0, pc0, E0, Ga4, Gav, K As Double
Dim F, F1, F2, F3, F4 As String
'Generelle Eingaben
v1 = 0.3
v2 = -0.1
m1 = 1
m2 = 3
'Start Berechnung
If v1 = v2 Then
    Debug.Print "Berechnung nicht möglich: v1 = v2"
    GoTo Out1:
End If
p0 = v1 * m1 / (1 - v1 ^ 2) ^ 0.5 + v2 * m2 / (1 - v2 ^ 2) ^ 0.5
'Subroutine 1
If v1 > 0 Then
    GoTo P1:
End If
If v2 > 0 Then
    GoTo P2:
End If
If v1 > v2 Then
    F = "F4"
Else
    F = "F3"
End If
GoTo Def1:
P2:
If p0 > 0 Then
    F = "F2"
Else
    F = "F3"
End If
GoTo Def1:
P1:
If v2 > 0 Then
    GoTo P3:

```

Anlage A: Relativistischer elastischer Stoß

```

End If
If p0 > 0 Then
  F = "F1"
Else
  F = "F4"
End If
GoTo Def1:
P3:
If v1 > v2 Then
  F = "F1"
Else
  F = "F2"
End If
GoTo Def1:
Def1:
If F = "F1" Then
  vc1 = v1
  vc2 = v2
  mc1 = m1
  mc2 = m2
End If
If F = "F2" Then
  vc1 = v2
  vc2 = v1
  mc1 = m2
  mc2 = m1
End If
If F = "F3" Then
  vc1 = -v1
  vc2 = -v2
  mc1 = m1
  mc2 = m2
End If
If F = "F4" Then
  vc1 = -v2
  vc2 = -v1
  mc1 = m2
  mc2 = m1
End If
'End Subroutine 1
'Berechnung
pc0 = vc1 * mc1 / (1 - vc1 ^ 2) ^ 0.5 + vc2 * mc2 / (1 - vc2 ^ 2) ^ 0.5
E0 = mc1 * ((1 - vc1 ^ 2) ^ -0.5 - 1) + mc2 * ((1 - vc2 ^ 2) ^ -0.5 - 1)
vc3m = -vc1
vc3p = vc1
K = 0
Do
  K = K + 1
  vc3 = (vc3m + vc3p) / 2
  Ga4 = (E0 - ((1 - vc3 ^ 2) ^ -0.5 - 1) * mc1) / mc2 + 1
  vc4 = (1 - 1 / Ga4 ^ 2) ^ 0.5
  If (vc3 * mc1 / (1 - vc3 ^ 2) ^ 0.5 + vc4 * mc2 / (1 - vc4 ^ 2) ^
0.5) > pc0 Then
    vc3p = vc3
  Else
    vc3m = vc3
  End If
Loop Until K = 80
'Subroutine 2
If F = "F1" Then
  v3 = vc3
  v4 = vc4
  m1 = mc1

```

Anlage A: Relativistischer elastischer Stoß

```

        m2 = mc2
    End If
    If F = "F2" Then
        v3 = vc4
        v4 = vc3
        m1 = mc2
        m2 = mc1
    End If
    If F = "F3" Then
        v3 = -vc3
        v4 = -vc4
        m1 = mc1
        m2 = mc2
    End If
    If F = "F4" Then
        v3 = -vc4
        v4 = -vc3
        m1 = mc2
        m2 = mc1
    End If
'End Subroutine 2
vt12 = (v1 - v2) / (1 - v1 * v2)
vt43 = (v4 - v3) / (1 - v4 * v3)
Dv = (vt12 / vt43) - 1
'Ergebnisdarstellung: Berechnete Werte aus Sicht eines ruhenden Beobachters
Debug.Print "F =", F
Debug.Print "v3 =", v3
Debug.Print "v4 =", v4
Debug.Print "vt12 =", vt12
Debug.Print "vt43 =", vt43
Debug.Print "Dv =", Dv
Out1:
End Sub

```

Abb. A.3: VBA Programm-Code für den Kalkulationsprozess aus Abb. A.1 und A.2

A.2 Tabellenkalkulation

In den Tabellen werden folgende Formeln verwendet:

$$p_0 = \frac{p}{c} = \frac{m_1 \gamma_1 v_1 + m_2 \gamma_2 v_2}{c}$$

$$\frac{E_0}{c^2} = (\gamma_1 - 1)m_1 + (\gamma_2 - 1)m_2$$

$$\frac{(v_3)_k}{c} = \frac{(v_{3+})_{k-1} + (v_{3-})_{k-1}}{2 \cdot c}$$

$$\gamma_4 = \frac{\frac{E_0}{c^2} - (\gamma_3 - 1)m_1}{m_2} + 1$$

$$\frac{v_4}{c} = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma_4^2}}$$

(Anmerkung: Aufgrund der gewählten Randbedingungen ist nur die Betrachtung positiver Ergebnisse des Wurzelausdrucks erforderlich)

$$\text{Abfrage: } f(v_3)_1 > p: \Rightarrow \frac{(v_{3+})_k}{c} = \frac{(v_3)_k}{c} \text{ und } \frac{(v_{3-})_k}{c} = \frac{(v_{3-})_{k-1}}{c}$$

Anlage A: Relativistischer elastischer Stoß

Abfrage: $f(v_3)_1 < p: \Rightarrow \frac{(v_{3+})_k}{c} = \frac{(v_{3+})_{k-1}}{c}$ und $\frac{(v_{3-})_k}{c} = \frac{(v_{3-})_{k-1}}{c}$

Zweckmäßige Startwerte: Für $\frac{(v_{3-})_0}{c} = -\frac{v_1}{c}$ und $\frac{(v_{3+})_0}{c} = \frac{v_1}{c}$

Die Formeln im Ergebnisfeld (blau eingefärbt) sind:

$$\frac{v_3}{c} = \frac{(v_3)_{k=80}}{c}$$

$$\frac{v_4}{c} = \frac{(v_4)_{k=80}}{c}$$

$$\frac{v_T(v_1, v_2)}{c} = \frac{v_1 - v_2}{1 - \frac{v_1 v_2}{c^2}}$$

$$\frac{v_T(v_4, v_3)}{c} = \frac{v_4 - v_3}{1 - \frac{v_4 v_3}{c^2}}$$

$$\delta_v = \frac{v_T(v_1, v_2)}{v_T(v_4, v_3)} - 1$$

Als Beispiele sind für $m_1 = 2$; $m_2 = 1$ die Fälle $v_1 = 0,5c$ und $v_2 = -0,5c$ sowie $v_1 = 0,00001c$ und $v_2 = 0$ dargestellt.

A.3 Codes für Tabellenkalkulation

Koordinate		Code
B3	=	B1*D1*(1-B1^2)^-0,5+B2*D2*(1-B2^2)^-0,5
D3	=	D1*((1-B1^2)^-0,5-1)+D2*((1-B2^2)^-0,5-1)
B8	=	(E7+F7)/2
C8	=	(D\$3-((1-B8^2)^-0,5-1)*D\$1)/D\$2+1
D8	=	(1-1/C8^2)^0,5
E8	=	WENN((B8*D\$1*(1-B8^2)^-0,5+D8*D\$2*(1-D8^2)^-0,5)>B\$3;E7;B8)
F8	=	WENN((B8*D\$1*(1-B8^2)^-0,5+D8*D\$2*(1-D8^2)^-0,5)>B\$3;B8;F7)
G9	=	WENN(B9=B8;"x";"")
H9	=	WENN(D9=D8;"x";"")
F1	=	B87
F2	=	D87
F3	=	(B1-B2)/(1-B1*B2)
F4	=	(F2-F1)/(1-F2*F1)
F5	=	F3/F4-1

Die Codes B8 – F8 sowie G9 und H9 erlauben ein Kopieren, hier bis B87 – G87

Mit den Status-Abfragen in Spalte G und H wird ermittelt, ob sich die Werte für v_3 und v_4 noch unterscheiden. Für v_3 gibt es nur geringe Abweichungen (Abb. A.4: Schritt 51, Abb. A.5: Schritt 52), v_4 zeigt abhängig von den Ausgangswerten stark unterschiedliches Verhalten; in diesen Beispielen ergeben sich keine Veränderungen mehr ab Schritt 49 (mit Unterbrechungen), bzw. bereits ab Schritt 19.

Anlage A: Relativistischer elastischer Stoß

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	$v_1/c=$	0,5	$m_1=$	2	$v_3/c=$	-0,209677419354839		
2	$v_2/c=$	-0,5	$m_2=$	1	$v_4/c=$	0,709302325581396		
3	$p_0/c=$	0,5773502692	$E_0/c^2=$	0,4641016151	$v_T/c (v_1, v_2)=$	0,8000000000000000		
4					$v_T/c (v_4, v_3)=$	0,8000000000000000		
5					$\delta_V=$	0,0E+00		
6	k	v_3/c	γ_4	v_4/c	v_{3-}/c	v_{3+}/c		St.
7	0				-0,5	0,5		3 4
8	1	0,0000000000000000	1,46410161513776	0,730406495763757	-0,5000000000000000	0,0000000000000000		
9	2	-0,2500000000000000	1,39851049716047	0,699076919847366	-0,2500000000000000	0,0000000000000000		
10	3	-0,1250000000000000	1,44829109242188	0,723362051517259	-0,2500000000000000	-0,1250000000000000		
11	4	-0,1875000000000000	1,42799037361527	0,713863539464603	-0,2500000000000000	-0,1875000000000000		
12	5	-0,2187500000000000	1,41446124643264	0,707230579852351	-0,2187500000000000	-0,1875000000000000		
13	6	-0,2031250000000000	1,42151952770374	0,710722406262171	-0,2187500000000000	-0,2031250000000000		
14	7	-0,2109375000000000	1,41806486850481	0,709022002845605	-0,2109375000000000	-0,2031250000000000		
15	8	-0,2070312500000000	1,41981068269019	0,709883363160283	-0,2109375000000000	-0,2070312500000000		
16	9	-0,2089843750000000	1,41894241344356	0,709455499378042	-0,2109375000000000	-0,2089843750000000		
17	10	-0,2099609375000000	1,41850480254676	0,709239458600344	-0,2099609375000000	-0,2089843750000000		
18	11	-0,2094726562500000	1,41872389812336	0,709347655434525	-0,2099609375000000	-0,2094726562500000		
19	12	-0,2097167968750000	1,41861442290016	0,709293601181963	-0,2097167968750000	-0,2094726562500000		
20	13	-0,2095947265625000	1,41866917864890	0,709320639342717	-0,2097167968750000	-0,2095947265625000		
21	14	-0,2096557617187500	1,41864180530934	0,709307123021790	-0,2097167968750000	-0,2096557617187500		
22	15	-0,2096862792968750	1,41862811523852	0,709300362791843	-0,2096862792968750	-0,2096557617187500		
23	16	-0,2096710205078120	1,41863496055736	0,709303743079295	-0,2096862792968750	-0,2096710205078120		
24	17	-0,2096786499023440	1,41863153796880	0,709302052978691	-0,2096786499023440	-0,2096710205078120		
25	18	-0,2096748352050780	1,41863324928079	0,709302898039773	-0,2096786499023440	-0,2096748352050780		
26	19	-0,2096767425537110	1,41863239362922	0,709302475511927	-0,2096786499023440	-0,2096767425537110		
27	20	-0,2096776962280270	1,41863196580012	0,709302264245983	-0,2096776962280270	-0,2096767425537110		
47	40	-0,2096774193551030	1,41863209000868	0,709302325581337	-0,2096774193551030	-0,2096774193541930		
48	41	-0,2096774193546480	1,41863209000888	0,709302325581438	-0,2096774193551030	-0,2096774193546480		
49	42	-0,2096774193548750	1,41863209000878	0,709302325581387	-0,2096774193548750	-0,2096774193546480		
50	43	-0,2096774193547620	1,41863209000883	0,709302325581413	-0,2096774193548750	-0,2096774193547620		
51	44	-0,2096774193548190	1,41863209000880	0,709302325581400	-0,2096774193548750	-0,2096774193548190		
52	45	-0,2096774193548470	1,41863209000879	0,709302325581394	-0,2096774193548470	-0,2096774193548190		
53	46	-0,2096774193548330	1,41863209000880	0,709302325581397	-0,2096774193548470	-0,2096774193548330		
54	47	-0,2096774193548400	1,41863209000879	0,709302325581395	-0,2096774193548400	-0,2096774193548330		
55	48	-0,2096774193548360	1,41863209000880	0,709302325581396	-0,2096774193548400	-0,2096774193548360		
56	49	-0,2096774193548380	1,41863209000880	0,709302325581396	-0,2096774193548400	-0,2096774193548380		X
57	50	-0,2096774193548390	1,41863209000880	0,709302325581396	-0,2096774193548400	-0,2096774193548390		X
58	51	-0,2096774193548390	1,41863209000879	0,709302325581395	-0,2096774193548390	-0,2096774193548390	X	
59	52	-0,2096774193548390	1,41863209000879	0,709302325581395	-0,2096774193548390	-0,2096774193548390	X	X
60	53	-0,2096774193548390	1,41863209000879	0,709302325581395	-0,2096774193548390	-0,2096774193548390	X	X
61	54	-0,2096774193548390	1,41863209000879	0,709302325581395	-0,2096774193548390	-0,2096774193548390	X	X
62	55	-0,2096774193548390	1,41863209000880	0,709302325581396	-0,2096774193548390	-0,2096774193548390	X	

Abb. A.4: Ergebnisse bei Nutzung der Tabellenkalkulation. $v_1 = 0,5c$, $v_2 = -0,5c$
Grüne Felder: Eingabewerte. Schritte zwischen 20 und 40 ausgeblendet

Anlage A: Relativistischer elastischer Stoß

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	$v_1/c=$	0,00001	$m_1=$	2	$v_3/c=$	3,33333305742102E-06		
2	$v_2/c=$	0	$m_2=$	1	$v_4/c=$	1,33333338849358E-05		
3	$p_0/c=$	2,00000000E-05	$E_0/c^2=$	1,00000008E-10	$v_T/c (v_1, v_2)=$	0,00001000000000		
4					$v_T/c (v_4, v_3)=$	0,000010000000828		
5					$\delta_V=$	-8,3E-08		
6	k	v_3/c	γ_4	v_4/c	v_{3-}/c	v_{3+}/c		St.
7	0				-0,5	0,5		3 4
8	1	0,0000000000000E+00	1,00000000010000	1,41421362087937E-05	0,0000000000000E+00	1,0000000000000E-05		
9	2	5,0000000000000E-06	1,00000000007500	1,22474492205951E-05	0,0000000000000E+00	5,0000000000000E-06		
10	3	2,5000000000000E-06	1,00000000009375	1,36930563961891E-05	2,5000000000000E-06	5,0000000000000E-06		
11	4	3,7500000000000E-06	1,00000000008594	1,31101090273823E-05	2,5000000000000E-06	3,7500000000000E-06		
12	5	3,1250000000000E-06	1,00000000009023	1,34338740912243E-05	3,1250000000000E-06	3,7500000000000E-06		
13	6	3,4375000000000E-06	1,00000000008818	1,32803375392606E-05	3,1250000000000E-06	3,4375000000000E-06		
14	7	3,2812500000000E-06	1,00000000008923	1,33591548737510E-05	3,2812500000000E-06	3,4375000000000E-06		
15	8	3,3593750000000E-06	1,00000000008871	1,33202712640041E-05	3,2812500000000E-06	3,3593750000000E-06		
16	9	3,3203125000000E-06	1,00000000008898	1,33398271082881E-05	3,3203125000000E-06	3,3593750000000E-06		
17	10	3,3398437500000E-06	1,00000000008885	1,33300694297534E-05	3,3203125000000E-06	3,3398437500000E-06		
18	11	3,3300781250000E-06	1,00000000008891	1,33349658128449E-05	3,3300781250000E-06	3,3398437500000E-06		
19	12	3,3349609375000E-06	1,00000000008888	1,33325345004281E-05	3,3300781250000E-06	3,3349609375000E-06		
20	13	3,3325195312500E-06	1,00000000008889	1,33337335592179E-05	3,3325195312500E-06	3,3349609375000E-06		
21	14	3,3337402343750E-06	1,00000000008889	1,33331340433020E-05	3,3325195312500E-06	3,3337402343750E-06		
22	15	3,3331298828125E-06	1,00000000008889	1,33334338046295E-05	3,3331298828125E-06	3,3337402343750E-06		
23	16	3,33343505859375E-06	1,00000000008889	1,33332672713907E-05	3,3331298828125E-06	3,33343505859375E-06		
24	17	3,33328247070313E-06	1,00000000008889	1,33333671915836E-05	3,33328247070313E-06	3,33343505859375E-06		
25	18	3,33335876464844E-06	1,00000000008889	1,33333338849358E-05	3,33328247070313E-06	3,33335876464844E-06		
26	19	3,33332061767578E-06	1,00000000008889	1,33333338849358E-05	3,33332061767578E-06	3,33335876464844E-06		X
27	20	3,33333969116211E-06	1,00000000008889	1,33333338849358E-05	3,33332061767578E-06	3,33333969116211E-06		X
47	40	3,33333305743509E-06	1,00000000008889	1,33333338849358E-05	3,33333305741690E-06	3,33333305743509E-06		X
48	41	3,33333305742599E-06	1,00000000008889	1,33333338849358E-05	3,33333305741690E-06	3,33333305742599E-06		X
49	42	3,33333305742144E-06	1,00000000008889	1,33333338849358E-05	3,33333305741690E-06	3,33333305742144E-06		X
50	43	3,33333305741917E-06	1,00000000008889	1,33333338849358E-05	3,33333305741917E-06	3,33333305742144E-06		X
51	44	3,33333305742031E-06	1,00000000008889	1,33333338849358E-05	3,33333305742031E-06	3,33333305742144E-06		X
52	45	3,33333305742087E-06	1,00000000008889	1,33333338849358E-05	3,33333305742087E-06	3,33333305742144E-06		X
53	46	3,33333305742116E-06	1,00000000008889	1,33333338849358E-05	3,33333305742087E-06	3,33333305742116E-06		X
54	47	3,33333305742102E-06	1,00000000008889	1,33333338849358E-05	3,33333305742087E-06	3,33333305742102E-06		X
55	48	3,33333305742095E-06	1,00000000008889	1,33333338849358E-05	3,33333305742095E-06	3,33333305742102E-06		X
56	49	3,33333305742098E-06	1,00000000008889	1,33333338849358E-05	3,33333305742098E-06	3,33333305742102E-06		X
57	50	3,33333305742100E-06	1,00000000008889	1,33333338849358E-05	3,33333305742100E-06	3,33333305742102E-06		X
58	51	3,33333305742101E-06	1,00000000008889	1,33333338849358E-05	3,33333305742101E-06	3,33333305742102E-06		X
59	52	3,33333305742101E-06	1,00000000008889	1,33333338849358E-05	3,33333305742101E-06	3,33333305742102E-06	X	X
60	53	3,33333305742101E-06	1,00000000008889	1,33333338849358E-05	3,33333305742101E-06	3,33333305742102E-06	X	X
61	54	3,33333305742102E-06	1,00000000008889	1,33333338849358E-05	3,33333305742102E-06	3,33333305742102E-06		X
62	55	3,33333305742102E-06	1,00000000008889	1,33333338849358E-05	3,33333305742102E-06	3,33333305742102E-06	X	X

Abb. A.5: Darstellung wie Abb. A.4. $v_1 = 0,00001c$, $v_2 = 0$
 Werte für v_4 bereits ab Iterationsschritt 19 unverändert