

Anlage B: Signalaustausch bei Systemen mit konstanter Beschleunigung

In dieser Anlage wird gezeigt, dass der Empfang von Signalen aus einem beschleunigten System von einem zu Beginn der Beschleunigungsphase hierzu ruhenden Beobachter und einem, der dazu gleichförmig bewegt ist, zu den gleichen Ergebnissen führt. Die hierbei geltenden analytischen Beziehungen wurden bereits in Kap. 6.4.1 in den Gleichungen Gl. (6.60) bis Gl. (6.80) abgeleitet. Für die Lösung dieses Problems gibt es aber auch eine numerische Methode, die im Folgenden dargestellt wird. Zwischen analytischem und numerischem Ansatz gibt es jeweils Vor- und Nachteile, die bei einer Gegenüberstellung, auch mit vergleichbaren Ergebnissen der numerischen Methode aus Anlage C, sichtbar werden.

B.1 Numerische Lösung

Innerhalb eines bewegten Systems S gilt allgemein der Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit und Beschleunigung

$$\Delta v = a(v) \cdot \Delta t(v) = a_S \cdot \Delta t_S \quad (\text{B.01})$$

Definitionsgemäß sind a_S und Δt_S konstant. Eine numerische Lösung erfordert das mehrfache Durchlaufen verschiedener Schritte; dazu wird zunächst die relativistische Geschwindigkeitsaddition genutzt, dann folgt jeweils die Ermittlung der Zunahme von Zeit und Weg.

1. Schritt:

$$v_1 = \frac{v_0 + \Delta v}{1 + \frac{v_0 \Delta v}{c^2}} = \frac{v_0 + a_S \Delta t_S}{1 + \frac{v_0 a_S \Delta t_S}{c^2}} \quad (\text{B.02})$$

2. Schritt:

$$\Delta t_1 = \Delta t_S \cdot \frac{\gamma(v_1) + \gamma(v_0)}{2} \quad (\text{B.03})$$

3. Schritt:

$$\Delta x_1 = \Delta t_1 v_0 + \frac{v_1 + v_0}{2} \Delta t_1 \quad (\text{B.04})$$

Es sei angemerkt, dass die Funktionen für $\gamma(v)$ und $v(\Delta v)$ nicht linear sind und die Bildung eines Mittelwertes somit nur eine Näherung darstellt, die durch die Wahl geeignet kleiner Intervalle für Δt_S kompensiert werden muss. Diese Schritte sind nun N-mal zu wiederholen und die Ergebnisse werden aufsummiert. Allgemein gilt dann

$$t_N = \Delta t_S \sum_{K=1}^N \frac{\gamma(v_K) + \gamma(v_{K-1})}{2} \quad (\text{B.05})$$

$$x_N = \sum_{K=1}^N \Delta t_K \frac{v_K + v_{K-1}}{2} \quad (\text{B.06})$$

mit

$$v_{K+1} = \frac{v_K + \Delta v}{1 + \frac{v_K \Delta v}{c^2}} - v_0 = \frac{v_K + a_S \Delta t_S}{1 + \frac{v_K a_S \Delta t_S}{c^2}} - v_0 \quad (\text{B.07})$$

Zu einem beliebigen Zeitpunkt t_K wird vom beschleunigten System S ein Signal an den Beobachter A zurückgeschickt. Da dieser sich aus Sicht von B während der Signalausbreitung bei Werten von $v_0 \neq 0$ entweder von S entfernt oder darauf zubewegt und außerdem die Werte für a_S und v_0 jeweils positiv oder negativ sein können, müssen für die Durchführung der Berechnungen unterschiedliche Regelungen getroffen werden (vgl. Zusammenstellung in Kapitel 2.1). Sind a_S und v_0 beide positiv, so entsteht für Beobachter B eine Situation entsprechend Typ b aus Abb. 2.2 mit

$$\Delta t = \Delta t_S \left(1 + \frac{v_0}{c}\right) \quad (\text{B.08})$$

Weisen a_S und v_0 dagegen unterschiedliche Richtungen auf so ändert sich das Vorzeichen in Gl. (B.08) entsprechend der Situation vom Typ d aus Abb. 2.2 (vgl. Kap.2).

Zusammengefasst entstehen folgende Kombinationen für die von Beobachter B durch die zunehmende Entfernung wahrgenommene Zeit zwischen zwei Impulsen $t_{K,R}$, in die beliebige positive oder negative Werte für die Geschwindigkeit v_0 eingesetzt werden können:

$$a_S > 0: \quad t_{K,R} = \frac{x_K - v_0 t_K}{c \left(1 + \frac{v_0}{c}\right)} \quad (\text{B.09})$$

$$a_S < 0: \quad t_{K,R} = \frac{|(x_K - v_0 t_K)|}{c \left(1 - \frac{v_0}{c}\right)} \quad (\text{B.10})$$

Für $v_0 = 0$ vereinfachen sich beide Beziehungen für beliebige Werte von a_S zu

$$t_{K,R} = \frac{|x_K|}{c} \quad (\text{B.11})$$

Die Gesamtzeit ausgehend vom Start der Beschleunigung bis zum Senden und anschließendem Empfang des Signals ist dann in allen Fällen

$$t_{K,T} = t_K + t_{K,R} \quad (\text{B.12})$$

Hierbei ist zu berücksichtigen, dass aus Sicht des Beobachters B die bei A eintreffenden Signale mit der Gleichung

$$t_{K,T}(v_0) = \frac{t_K + t_{K,R}}{\gamma(v_0)} \quad (\text{B.13})$$

korrigiert werden müssen um den Effekt um zu berücksichtigen, dass für A aus Sicht von B die Zeit um den Faktor $\gamma(v_0)$ langsamer abläuft.

Mit den hier dargestellten Beziehungen ist es möglich, die Werte für die Empfangszeiten von relativ zueinander bewegten Beobachtern zu ermitteln. Hierzu werden zunächst die Zeitabstände bestimmt, mit der das beschleunigte System S die Signale aussendet. Während diese subjektiv innerhalb des Systems definitionsgemäß Δt_S sind, können von einem nicht beschleunigten Beobachter anhand der Gleichungen die Werte für den Signalabstand bestimmt werden. Außerdem lässt sich damit die Entfernung von S beim Senden berechnen. Somit können also die Gesamtzeiten für die Ankunft der Signale für einen beliebig bewegten Beobachter ermittelt werden.

In Abb. B.1 ist der Programmablaufplan zur numerischen Berechnung von v_N , t_N , t_T und x_N gemäß der genannten Gleichungen dargestellt. (Es werden durchgehend die Werte für t_K und x_K berechnet; da nur die letzten Ergebnisse betrachtet werden entsprechen diese t_N und x_N). Zusätzlich wurde auch die für einen relativ hierzu bewegten Beobachter feststellbare Beschleunigung a_N ermittelt, der von der subjektiv im bewegten System S messbaren Beschleunigung a_S abweicht. Wie bereits in Kap. 6.4.1 dargestellt wurde, muss die subjektiv eingestellte Beschleunigung und die von einem dazu mit der Geschwindigkeit v bewegten externen Beobachter um den Faktor $\gamma^3(v)$ abweichen. Um diesen theoretisch zu erwartenden Effekt zu verifizieren, wurde daher der Wert $\gamma^3 a_N$ ebenfalls aus den Daten berechnet. Es zeigt sich eine sehr genaue Übereinstimmung zwischen a_S und $\gamma^3 a_N$.

In Tab. B.1 sind die für die Berechnung mit VBA (Visual Basic) benutzten Formelzeichen den im Text verwendeten zugeordnet. Der VBA-Programm-Code ist in Abb. B.1 dargestellt. Das Programm wurde so aufgebaut, dass die Ausgangsgeschwindigkeit v_0 , sowie die subjektiv gültige Beschleunigung a_S und Gesamtdauer des Versuchs t_S vorgegeben werden können. Außerdem kann die Anzahl der vorgesehenen Iterationsschritte N frei gewählt werden, wodurch eine wichtige Einflussgröße gegeben ist. Mit dem VBA-Programm wurden Werte bis zu $N = 10^7$ untersucht. Diese Berechnungen sind nur mit solchen Programmen sinnvoll, da bei einer konventionellen Tabellenkalkulation jeder Iterationsschritt gesonderte Programmfelder erfordert und dies zu enormen Dateigrößen führen würde.

In Tab. B.2 sind für die Bereiche a) bis c) die Ergebnisse aus Berechnungen mit den Randbedingungen $a_S = 10 \text{ m/s}^2$, $t_S = 1000\text{s}$ dargestellt. Als Ausgangsgeschwindigkeit wurden Werte von $v_0 = 0$, $v_0 = 369 \text{ km/s}$ und $v_0 = 0,5c$ eingesetzt. Für alle Ergebnisse wurden δ -Werte nach dem Schema

$$\delta v_T = \frac{v_T(K)}{v_T(K-1)} - 1 \quad (\text{B. 14})$$

ermittelt und gegenübergestellt, wobei K in diesem Fall eine Zehnerpotenz entsprechend den Angaben in der Tabelle repräsentiert.

Die durchgeführten Berechnungen zeigen, dass in einem Bereich von etwa 10^2 bis 10^4 die Unterschiede zwischen den Ergebnissen ein Minimum erreichen. Dies lässt darauf schließen, dass diese Zonen den größten Vertrauensbereich aufweisen. Dieser ist primär abhängig vom gewählten Berechnungssystem; als Verfahren wurde hier Microsoft Excel® genutzt, dass eine Genauigkeit von 15 Stellen aufweist. Bei Rechnersystemen mit höherer Genauigkeit sind hier andere Ergebnisse zu erwarten. Die Gesamtqualität der Berechnungen lässt sich jedoch erst im Vergleich zwischen analytischem und numerischem Verfahren überprüfen, der im Anschluss vorgenommen wird.

Anlage B: Signalaustausch bei Systemen mit konstanter Beschleunigung

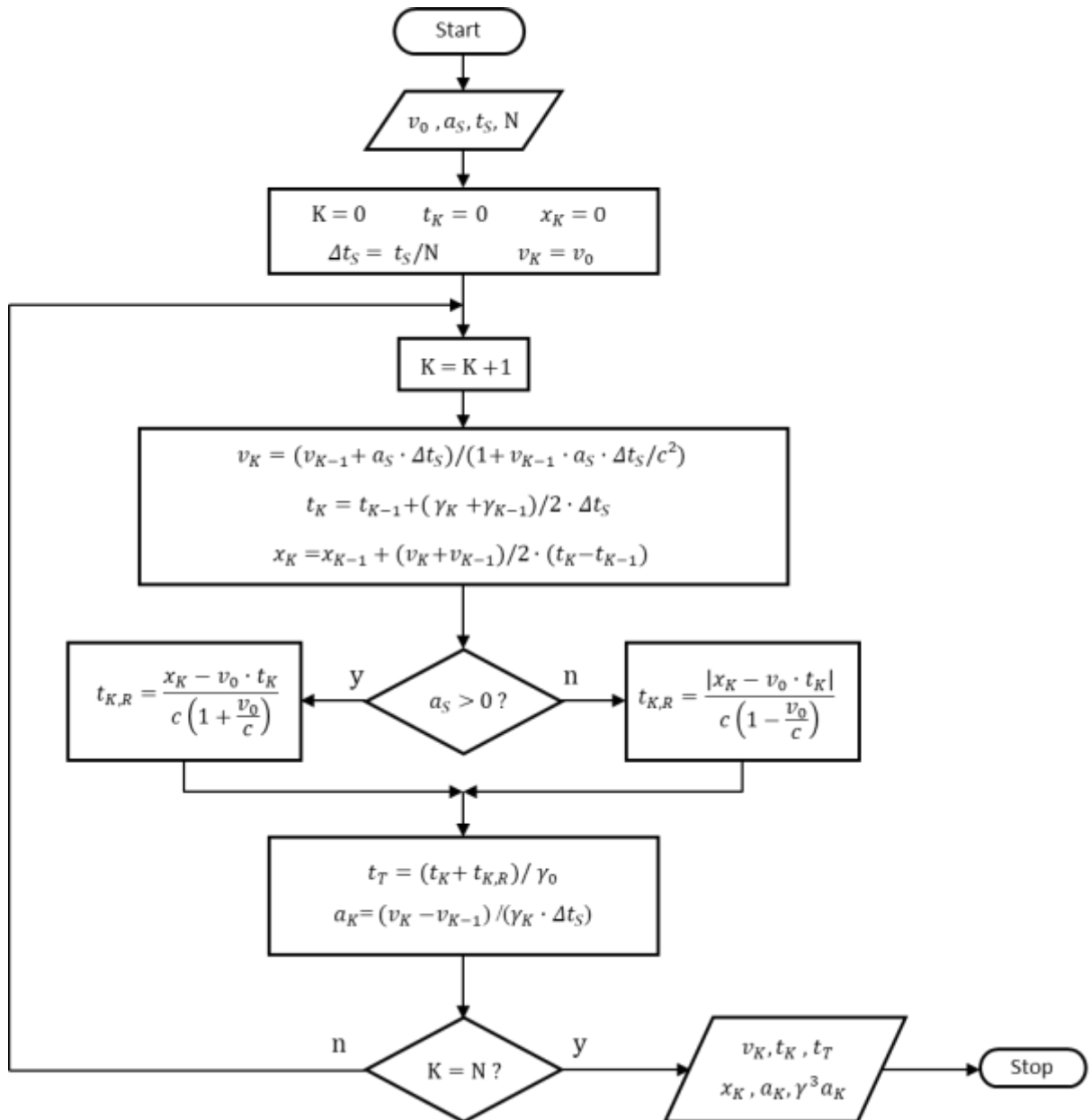


Abb. B.1: Programmablaufplan des Kalkulationsprozesses

Wert	VBA-Code	Wert	VBA-Code	Wert	VBA-Code
v_0	v0	a_s	a0	t_s	tS
Δt_s	dtS	t_K	tK	t_{K-1}	tKm1
x_K	xK	v_K	vK	v_{K-1}	vKm1
γ_K	GaK	γ_{K-1}	GaKm1	$t_{K,R}$	tKR
t_T	tT	a_K	aK	$\gamma^3 a_K$	aKGa3

Tab. B.1: Formelzeichen und dafür genutzte VBA-Codes

Anlage B: Signalaustausch bei Systemen mit konstanter Beschleunigung

```
Sub B()  
Dim c, v0, a0, aK, tS, dtS, tK, tKml, xK, vK, vKml, GaK, GaKml As Double  
Dim aKGa3, tKR, tT, vT, K, N As Double  
'Eingaben  
v0 = 299792.458 / 2 'Ausgangsgeschwindigkeit in km/s  
a0 = 10 'Beschleunigung in m/s2  
N = 1000 'Anzahl Iterationsschritte  
tS = 1000 'Zeit bis zum Abstrahlen eines Signals in s  
'Start Berechnung  
c = 299792.458 'Lichtgeschwindigkeit in km/s  
a0 = a0 / 1000 'Beschleunigung in km/s2  
dtS = tS / N  
tK = 0  
xK = 0  
vK = v0  
For K = 1 To N  
vKml = vK  
tKml = tK  
GaKml = 1 / (1 - (vKml / c) ^ 2) ^ 0.5  
vK = (vK + a0 * dtS) / (1 + vK * a0 * dtS / c ^ 2)  
GaK = 1 / (1 - (vK / c) ^ 2) ^ 0.5  
tK = tK + (GaKml + GaK) / 2 * dtS  
xK = xK + (vK + vKml) / 2 * (tK - tKml)  
If a0 > 0 Then  
tKR = (xK - tK * v0) / c / (1 + v0 / c)  
Else  
tKR = Abs((xK - tK * v0) / c / (1 - v0 / c))  
End If  
tT = (tK + tKR) * (1 - (v0 / c) ^ 2) ^ 0.5  
aK = (vK - vKml) / (GaK * dtS) * 1000  
aKGa3 = aK * GaK ^ 3  
vT = vK - v0  
Next K  
'Ergebnis für einen Beobachter mit Geschwindigkeit v0 zum Beginn des Versuchs  
Debug.Print "vT", "vK", "tN", "xN", "aN", "aNGa3"  
Debug.Print vT, vK, tT, xK, aK, aKGa3  
End Sub
```

Abb. B.2: VBA Programm-Code für den Kalkulationsprozess B aus Abb. B1

Grundsätzlich lässt sich feststellen, dass alle δ -Werte bei $v_0 = 0$ sehr gering sind und dann bei höheren Werten leicht ansteigen. Insbesondere die Werte für t_T , die sich für eine experimentelle Überprüfung gut eignen würden, unterscheiden sich innerhalb eines Bereiches mit konstanter Beschleunigung a_s kaum zwischen den einzelnen Werten von v_0 . Auch zwischen den unterschiedlichen Beschleunigungswerten sind die Unterschiede so gering, dass nicht von einem systematischen Einfluss auszugehen ist, sondern die Effekte auf Einflüsse der numerischen Berechnung zurückzuführen sind.

Die Abweichungen zwischen den Ergebnissen für die gewählten Iterationsschritte zwischen 1 und 10^7 zeigen, dass keine systematischen Abweichungen vorliegen. Im Bereich von 10^3 weisen die Ergebnisse eine hohe Stabilität und die geringsten Unterschiede auf; für vergleichende Betrachtungen eignen sie sich daher besonders.

Der zusätzliche Wert von $v_0 = 369$ km/s wurde deshalb gewählt, weil er der Geschwindigkeit der Sonne gegenüber der kosmischen Hintergrundstrahlung entspricht und deshalb, falls sich bei den Berechnungen ein Effekt zeigen würde, Basis für weitere Betrachtungen sein könnte (vgl. auch Kap. 1.7).

Anlage B: Signalaustausch bei Systemen mit konstanter Beschleunigung

Es ist aber festzustellen, dass bei keiner dieser Auswertungen ein nennenswerter Unterschied erkennbar wird und somit die subjektiv ermittelten Beobachtungen zwischen sich unterschiedlich bewegendem Beobachtern übereinstimmen. Dies gilt auch für die hohe Geschwindigkeit von $v_0 = 0,5c$.

Ergänzend ist noch zu erwähnen, dass die hier verwendeten Werte von t_N , x_N etc. ausschließlich wegen der numerischen Rechenmethode so benannt wurden und den analytisch bestimmten Angaben für t_A bzw. x_A entsprechen. Auch diese Werte beziehen sich demnach auf die Messergebnisse des zum Beginn eines Versuchs mit gleicher Geschwindigkeit wie S bewegten Beobachters A.

K	N	v_T	t_N	t_T	x_N	$\gamma^3 a_N$
1	1	10,0000000000000	1000,00000027816	1000,01667848293	5000,00000139081	10,0000000111265
2	10	9,99999999632825	1000,00000018637	1000,01667839113	5000,00000047288	10,0000000011126
3	10^2	9,99999999629152	1000,00000018545	1000,01667839021	5000,00000046369	10,0000000001113
4	10^3	9,99999999629152	1000,00000018545	1000,01667839020	5000,00000046369	10,0000000000098
5	10^4	9,99999999629107	1000,00000018544	1000,01667839020	5000,00000046378	10,0000000000010
6	10^5	9,99999999628186	1000,00000018545	1000,01667839021	5000,00000046244	9,9999999991214
7	10^6	9,99999999612586	1000,00000018732	1000,01667839208	5000,00000044603	10,0000000000898
8	10^7	9,9999999923743	1000,00000024389	1000,01667844866	5000,00000204189	9,99999998587893
		δv_T	δt_N	δt_T	δx_N	$\delta \gamma^3 a_N$
1/2		$3,67 \cdot 10^{-10}$	$9,18 \cdot 10^{-11}$	$9,18 \cdot 10^{-11}$	$1,84 \cdot 10^{-10}$	$1,00 \cdot 10^{-9}$
2/3		$3,67 \cdot 10^{-12}$	$9,20 \cdot 10^{-13}$	$9,20 \cdot 10^{-13}$	$1,84 \cdot 10^{-12}$	$1,00 \cdot 10^{-10}$
3/4		0	0	$9,99 \cdot 10^{-15}$	0	$1,01 \cdot 10^{-11}$
4/5		$4,49 \cdot 10^{-14}$	$9,99 \cdot 10^{-15}$	0	$-1,80 \cdot 10^{-14}$	$8,88 \cdot 10^{-13}$
5/6		$9,21 \cdot 10^{-13}$	$-9,99 \cdot 10^{-15}$	$-9,99 \cdot 10^{-15}$	$2,68 \cdot 10^{-13}$	$8,88 \cdot 10^{-12}$
6/7		$1,56 \cdot 10^{-11}$	$-1,87 \cdot 10^{-12}$	$-1,87 \cdot 10^{-12}$	$3,28 \cdot 10^{-12}$	$-1,78 \cdot 10^{-11}$
7/8		$-3,11 \cdot 10^{-10}$	$-5,66 \cdot 10^{-11}$	$-5,66 \cdot 10^{-11}$	$-3,19 \cdot 10^{-10}$	$1,42 \cdot 10^{-9}$

a) $v_0 = 0$, $a_S = 10\text{m/s}^2$, $t_S = 1000\text{s}$

K	N	v_T	t_N	t_T	x_N	$\gamma^3 a_N$
1	1	378,999984439478	1000,00077830515	1000,01667848259	374000,283305861	10,0000004216944
2	10	378,999984435807	1000,00077821336	1000,01667839113	374000,283372686	10,0000000421697
3	10^2	378,999984435772	1000,00077821244	1000,01667839021	374000,283373356	10,0000000042204
4	10^3	378,999984435760	1000,00077821243	1000,01667839020	374000,283373357	10,0000000004517
5	10^4	378,999984435533	1000,00077821243	1000,01667839020	374000,283373242	9,99999999988323
6	10^5	378,999984433259	1000,00077821243	1000,01667839020	374000,283372125	10,00000000010201
7	10^6	378,999984411821	1000,00077821244	1000,01667839018	374000,283362434	9,99999998396706
8	10^7	378,999984156412	1000,00077821289	1000,01667839010	374000,283206699	10,0000000408106
		δv_T	δt_N	δt_T	δx_N	$\delta \gamma^3 a_N$
1/2		$9,69 \cdot 10^{-12}$	$9,18 \cdot 10^{-11}$	$9,15 \cdot 10^{-11}$	$-1,79 \cdot 10^{-10}$	$3,80 \cdot 10^{-8}$
2/3		$9,10 \cdot 10^{-14}$	$9,20 \cdot 10^{-13}$	$9,20 \cdot 10^{-13}$	$-1,79 \cdot 10^{-12}$	$3,79 \cdot 10^{-9}$
3/4		$3,09 \cdot 10^{-14}$	$9,99 \cdot 10^{-15}$	$9,99 \cdot 10^{-15}$	$-2,66 \cdot 10^{-15}$	$3,77 \cdot 10^{-10}$
4/5		$6,01 \cdot 10^{-13}$	0	0	$3,07 \cdot 10^{-13}$	$5,68 \cdot 10^{-11}$
5/6		$6,00 \cdot 10^{-12}$	0	0	$2,99 \cdot 10^{-12}$	$-1,14 \cdot 10^{-10}$
6/7		$5,66 \cdot 10^{-11}$	$-9,99 \cdot 10^{-15}$	$2,00 \cdot 10^{-14}$	$2,59 \cdot 10^{-11}$	$1,71 \cdot 10^{-9}$
7/8		$6,74 \cdot 10^{-10}$	$-4,50 \cdot 10^{-13}$	$7,99 \cdot 10^{-14}$	$4,16 \cdot 10^{-10}$	$-5,68 \cdot 10^{-9}$

b) $v_0 = 369\text{ km/s}$, $a_S = 10\text{m/s}^2$, $t_S = 1000\text{s}$

Anlage B: Signalaustausch bei Systemen mit konstanter Beschleunigung

K	N	v_T	t_N	t_T	x_N	$\gamma^3 a_N$
1	1	149903,728874916	1154,71016786646	1000,01667841339	173091029,842051	10,0001667931727
2	10	149903,728874913	1154,71016776046	1000,01667839043	173091029,861909	10,0000166791061
3	10 ²	149903,728874913	1154,71016775940	1000,01667839021	173091029,862108	10,0000016684019
4	10 ³	149903,728874922	1154,71016775940	1000,01667839022	173091029,862117	10,0000002015203
5	10 ⁴	149903,728874803	1154,71016775925	1000,01667838996	173091029,862026	9,99999992987018
6	10 ⁵	149903,728875378	1154,71016775999	1000,01667839124	173091029,862469	10,0000022582798
7	10 ⁶	149903,728863738	1154,71016774494	1000,01667836518	173091029,853446	9,99998285456124
8	10 ⁷	149903,729001552	1154,71016792619	1000,01667867908	173091029,962107	10,0000216670928
		δv_T	δt_N	δt_T	δx_N	$\delta \gamma^3 a_N$
1/2		$1,84 \cdot 10^{-14}$	$9,18 \cdot 10^{-11}$	$2,30 \cdot 10^{-11}$	$-1,15 \cdot 10^{-10}$	$1,50 \cdot 10^{-5}$
2/3		0	$9,18 \cdot 10^{-13}$	$2,20 \cdot 10^{-13}$	$-1,15 \cdot 10^{-12}$	$1,50 \cdot 10^{-6}$
3/4		$-5,84 \cdot 10^{-14}$	0	$-9,99 \cdot 10^{-15}$	$-5,20 \cdot 10^{-14}$	$1,47 \cdot 10^{-7}$
4/5		$7,93 \cdot 10^{-13}$	$1,30 \cdot 10^{-13}$	$2,60 \cdot 10^{-13}$	$5,26 \cdot 10^{-13}$	$2,72 \cdot 10^{-8}$
5/6		$-3,84 \cdot 10^{-12}$	$-6,41 \cdot 10^{-13}$	$-1,28 \cdot 10^{-12}$	$-2,56 \cdot 10^{-12}$	$-2,33 \cdot 10^{-7}$
6/7		$7,77 \cdot 10^{-11}$	$1,30 \cdot 10^{-11}$	$2,61 \cdot 10^{-11}$	$5,21 \cdot 10^{-11}$	$1,94 \cdot 10^{-6}$
7/8		$-9,19 \cdot 10^{-10}$	$-1,57 \cdot 10^{-10}$	$-3,14 \cdot 10^{-10}$	$-6,28 \cdot 10^{-10}$	$-3,88 \cdot 10^{-6}$

c) $v_0 = 0,5c$, $a_S = 10\text{m/s}^2$, $t_S = 1000\text{s}$

Tab. B.2: Werte für v_T , t_A (bzw. t_N), t_T , x_N und $\gamma^3 a_N$ aus Berechnungen des Programms B dargestellt in Abb. B.2 in Abhängigkeit von der Anzahl an Iterationsschritten N. Angaben für v_T in km/s, t_A bzw. t_T in s, x_N in km und a_N in m/s².

B.3 Verbesserung der Genauigkeit durch Nutzung einer Taylorentwicklung

Wenn die dargestellten analytischen Berechnungen für sehr kleine Werte für Zeit bzw. Geschwindigkeit vorgenommen werden sollen, ergeben sich in Abhängigkeit von der Berechnungsgenauigkeit größere Differenzen. Dies betrifft insbesondere die Gl. (6.74) für die zurückgelegte Entfernung

$$x_A = \frac{c^2}{a_S} \left\{ \left(1 - \frac{v_A^2}{c^2} \right)^{-1/2} - 1 \right\} = \frac{c^2}{a_S} (\gamma - 1) \quad (6.74)$$

Bei kleinen Werten für v_A entsteht der Effekt, dass der Wert für γ nur geringfügig von 1 abweicht und wegen der Differenzbildung zu 1 ungenau wird. Im vorliegenden Fall wurde das Programm Microsoft Excel® mit einer Genauigkeit von 15 Stellen genutzt, und so kommt es bei Werten für v_A unterhalb von ca. 400 km/s zu Abweichungen, die bei kleinen Werten sehr hoch werden können. In diesem Fall ist es empfehlenswert, statt der Gl. (6.74) eine Taylorentwicklung für γ zu benutzen, die als ersten Wert die „1“ enthält. Diese lautet:

$$\gamma = \left(1 - \frac{v_A^2}{c^2} \right)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2} \frac{v_A^2}{c^2} + \frac{3}{8} \frac{v_A^4}{c^4} + \frac{15}{48} \frac{v_A^6}{c^6} + \dots \quad (\text{B.15})$$

1. 2. 3. 4. Taylor – Glied

In der folgenden Tabelle B.3 wird dargestellt, wie sich Unterschiede für verschiedene Versuchszeiten t_S bzw. Geschwindigkeiten von v_A auswirken.

t_S	v_A	t_A	$x_A(1)$	$x_A(2)$	$x_A(3)$
1	0,0100000000000000	1,0000000000000000	0,00399127477173885	0,00500000000000000	0,00500000000000000
10	0,0999999999999963	10,00000000000002	0,498909346467356	0,500000000000004	0,500000000000004
100	0,999999999996291	100,000000000185	50,0006947029584	50,0000000000463	50,0000000000463
1.000	9,99999999629117	1000,00000018544	5000,00161862472	5000,00000046360	5000,00000046360
10.000	99,9999962911666	10000,0001854417	500000,004207119	500000,004636038	500000,004636042
20.000	199,999970329337	20000,0014835334	2000000,07470196	2000000,07417642	2000000,07417667
40.000	399,999762634824	40000,0118682683	8000001,18686648	8000001,18681095	8000001,18682679
60.000	599,999198893243	60000,0400554100	18000006,0086520	18000006,0081306	18000006,0083111
80.000	799,998101082647	80000,0949461719	32000018,9903299	32000018,9882180	32000018,9892321
100.000	999,996291182986	100000,185441779	50000046,3602845	50000046,3565675	50000046,3604362
200.000	1999,97032986004	200001,483536709	200000741,768963	200000741,520219	200000741,767795
1.000.000	9996,29281639030	1000185,45199287	5000463621,38578	5000459757,50365	5000463617,62560

Tab. B.3: Werte für v_A , t_A und x_A in Abhängigkeit von t_S nach verschiedenen Verfahren

$x_A(1)$: Gl. (6.74)

$x_A(2)$: Gl. (B.15) Taylorglieder 1–3

$x_A(3)$: Gl. (B.15) Taylorglieder 1–4

Optimale Werte für x_A grün gekennzeichnet. Ergebnisse in km und s.

Für t_S -Werte bis 20.000s hat demnach die Berechnung gemäß $x_A(3)$ unter Nutzung der ersten 4 Taylorglieder die höchste Genauigkeit, bis 1.000s ist auch $x_A(2)$ ausreichend genau. Bei Werten ab ca. 40.000s ist die Gl. (6.74) vorzuziehen (oder es müssten noch weitere Taylorglieder hinzugefügt werden).

B.4 Ergebnisvergleich der unterschiedlichen Verfahren

Abschließend sollen die aus den verschiedenen Verfahren berechneten Ergebnisse verglichen werden. Neben den hier dargestellten numerischen und analytischen Verfahren wurden zusätzlich die numerisch gewonnene Ergebnisse aus Anlage C auf Basis der relativistischen Raketengleichung hinzugefügt. Während bei den ersten beiden Berechnungen eine konstante Beschleunigung zur Voraussetzung gemacht ist, ergibt sich diese Situation bei der relativistischen Raketengleichung für den Sonderfall, dass der Ausstoß der Stützmasse im Verhältnis zur verbleibenden Raketenmasse konstant gehalten wird.

In der Tab. B.4 sind die nach den unterschiedlichen Verfahren ermittelten Werte für $v_T = v_N - v_0$, t_A , t_T und x_N für die Ausgangsgeschwindigkeiten $v_0 = 0$ sowie 369 km/s und 0,5c dargestellt. Die unter A aufgeführten Werte wurden analytisch unter Nutzung der Gleichungen Gl. (6.60) bis (6.74) sowie (B. 15) berechnet, B sind die numerischen Werte entsprechend Anlage B und C stammen aus Anlage C, Typ „B1“. Der Vergleich zeigt, dass die Endgeschwindigkeiten v_T für A und B sehr gut übereinstimmen, diese aber für die Variante C, insbesondere bei höheren Ausgangswerten, etwas abweicht. Bei A ergeben sich darüber hinaus im Bereich kleiner Geschwindigkeiten etwas höhere Werte für x_N . Generell lässt sich aber sagen, dass die Übereinstimmung der Ergebnisse trotz der völlig verschiedenen Ansätze gut ist.

Des Weiteren wurden noch die Werte für $\gamma^3 a_N$ beigefügt. Es zeigt sich in allen Fällen, dass sie sehr genau den subjektiv im beschleunigten Beobachter gelten Wert von a_S entsprechen.

Anlage B: Signalaustausch bei Systemen mit konstanter Beschleunigung

a)	St.	v_A	t_A	t_T	x_A	a_S
A	(1)	0	0		0	10
A	(2)	9,99999999629117	1000,00000018544		5000,00000046361	10
A	Diff.	9,99999999629117	1000,00000018544	1000,01667839020	5000,00000046361	
	N	v_T	t_N	t_T	x_N	$\gamma^3 a_N$
B	10^2	9,99999999629152	1000,00000018545	1000,01667839021	5000,00000046369	10,0000000001113
B	10^3	9,99999999629152	1000,00000018545	1000,01667839020	5000,00000046369	10,0000000000098
B	10^4	9,99999999629107	1000,00000018544	1000,01667839020	5000,00000046378	10,0000000000010
B	10^5	9,99999999628186	1000,00000018545	1000,01667839021	5000,00000046244	9,9999999991214
	N	δv_T	δt_N	δt_T	δx_N	$\delta \gamma^3 a_N$
B	10^2	$-3,52 \cdot 10^{-14}$	$-8,22 \cdot 10^{-15}$	$-6,78 \cdot 10^{-15}$	$-1,69 \cdot 10^{-14}$	$-1,11 \cdot 10^{-11}$
B	10^3	$-3,52 \cdot 10^{-14}$	$-8,22 \cdot 10^{-15}$	0	$-1,69 \cdot 10^{-14}$	$-9,84 \cdot 10^{-13}$
B	10^4	$9,77 \cdot 10^{-15}$	0	0	$-3,50 \cdot 10^{-14}$	$-9,65 \cdot 10^{-14}$
B	10^5	$9,31 \cdot 10^{-13}$	$-8,22 \cdot 10^{-15}$	$-6,78 \cdot 10^{-15}$	$2,34 \cdot 10^{-13}$	$8,79 \cdot 10^{-12}$
	N	v_T	t_N	t_T	x_N	$\gamma^3 a_N$
C	10^2	9,99999999608546	1000,00000018545	1000,01667839021	5000,00000054144	9,99999999883114
C	10^3	9,99999999607074	1000,00000018544	1000,01667839020	5000,00000053831	9,99999999868366
C	10^4	9,99999999607296	1000,00000018544	1000,01667839020	5000,00000053928	9,99999999869584
C	10^5	9,99999999610921	1000,00000018545	1000,01667839021	5000,00000055217	9,99999999845206
	N	δv_T	δt_N	δt_T	δx_N	$\delta \gamma^3 a_N$
C	10^2	$2,06 \cdot 10^{-11}$	$-8,22 \cdot 10^{-15}$	$-6,78 \cdot 10^{-15}$	$3,24 \cdot 10^{-7}$	$1,17 \cdot 10^{-10}$
C	10^3	$2,20 \cdot 10^{-11}$	0	0	$3,24 \cdot 10^{-7}$	$1,32 \cdot 10^{-10}$
C	10^4	$2,19 \cdot 10^{-11}$	0	0	$3,24 \cdot 10^{-7}$	$1,30 \cdot 10^{-10}$
C	10^5	$1,82 \cdot 10^{-11}$	$-8,22 \cdot 10^{-15}$	$-6,78 \cdot 10^{-15}$	$3,24 \cdot 10^{-7}$	$1,55 \cdot 10^{-10}$

b)	St.	v_A	t_A	t_T	x_A	a_S
A	(1)	369	36900,0279516977		6808057,73563331	10
A	(2)	378,99998443578	37900,0287299112		7182058,01900707	10
A	Diff.	9,99998443578	1000,0007782135	1000,01667839124	374000,28337376	
	N	v_T	t_N	t_T	x_N	$\gamma^3 a_N$
B	10^2	9,99998443577	1000,0007782124	1000,01667839021	374000,28337336	10,0000000042204
B	10^3	9,99998443576	1000,0007782124	1000,01667839020	374000,28337336	10,0000000004517
B	10^4	9,99998443553	1000,0007782124	1000,01667839020	374000,28337324	9,99999999988323
B	10^5	9,99998443326	1000,0007782124	1000,01667839020	374000,28337213	10,0000000010201
	N	δv_T	δt_N	δt_T	δx_N	$\delta \gamma^3 a_N$
B	10^2	$2,09 \cdot 10^{-14}$	$1,04 \cdot 10^{-12}$	$1,03 \cdot 10^{-12}$	$2,87 \cdot 10^{-12}$	$-4,22 \cdot 10^{-10}$
B	10^3	$5,17 \cdot 10^{-14}$	$1,05 \cdot 10^{-12}$	$1,04 \cdot 10^{-12}$	$1,08 \cdot 10^{-12}$	$-4,52 \cdot 10^{-11}$
B	10^4	$6,52 \cdot 10^{-13}$	$1,05 \cdot 10^{-12}$	$1,04 \cdot 10^{-12}$	$1,08 \cdot 10^{-12}$	$1,17 \cdot 10^{-11}$
B	10^5	$6,65 \cdot 10^{-12}$	$1,05 \cdot 10^{-12}$	$1,04 \cdot 10^{-12}$	$1,38 \cdot 10^{-13}$	$-1,02 \cdot 10^{-10}$
	N	v_T	t_N	t_T	x_N	$\gamma^3 a_N$
C	10^2	9,99998435551	1000,0007782124	1000,01667839008	374000,28333340	9,99999992287606
C	10^3	9,99998435367	1000,0007782124	1000,01667839007	374000,283333240	9,99999991716842
C	10^4	9,99998435376	1000,0007782124	1000,01667839006	374000,283333254	9,99999991716842
C	10^5	9,99998435645	1000,0007782124	1000,01667839007	374000,283333389	9,99999992496930
	N	δv_T	δt_N	δt_T	δx_N	$\delta \gamma^3 a_N$
C	10^2	$2,12 \cdot 10^{-10}$	$1,04 \cdot 10^{-12}$	$1,17 \cdot 10^{-12}$	$-5,74 \cdot 10^{-10}$	$7,71 \cdot 10^{-9}$
C	10^3	$2,17 \cdot 10^{-10}$	$1,05 \cdot 10^{-12}$	$1,18 \cdot 10^{-12}$	$1,10 \cdot 10^{-10}$	$8,28 \cdot 10^{-9}$
C	10^4	$2,16 \cdot 10^{-10}$	$1,05 \cdot 10^{-12}$	$1,19 \cdot 10^{-12}$	$1,10 \cdot 10^{-10}$	$8,28 \cdot 10^{-9}$
C	10^5	$2,09 \cdot 10^{-10}$	$1,05 \cdot 10^{-12}$	$1,18 \cdot 10^{-12}$	$1,07 \cdot 10^{-10}$	$7,50 \cdot 10^{-9}$

Anlage B: Signalaustausch bei Systemen mit konstanter Beschleunigung

c)	St.	v_A	t_A	t_T	x_A	a_S
A	(1)	149896,229000000	17308525,6327320		1390379100217,26	10
A	(2)	149903,728874913	17309680,3428997		1390552191247,12	10
A	Diff.	7,499874913	1154,7101678	1000,01667838490	173091029,86	
	N	v_T	t_N	t_T	x_N	$\gamma^3 a_N$
B	10^2	7,499874913	1154,7101678	1000,01667839021	173091029,86	10,0000016684019
B	10^3	7,499874922	1154,7101678	1000,01667839022	173091029,86	10,0000002015203
B	10^4	7,499874803	1154,7101678	1000,01667838996	173091029,86	9,99999992987018
B	10^5	7,499875378	1154,7101678	1000,01667839124	173091029,86	10,0000022582798
	N	δv_T	δt_N	δt_T	δx_N	$\delta \gamma^3 a_N$
B	10^2	$-4,22 \cdot 10^{-15}$	$-4,29 \cdot 10^{-12}$	$-5,31 \cdot 10^{-12}$	$-7,33 \cdot 10^{-12}$	$-1,67 \cdot 10^{-7}$
B	10^3	$-6,27 \cdot 10^{-14}$	$-4,29 \cdot 10^{-12}$	$-5,32 \cdot 10^{-12}$	$-7,38 \cdot 10^{-12}$	$-2,02 \cdot 10^{-8}$
B	10^4	$7,30 \cdot 10^{-13}$	$-4,16 \cdot 10^{-12}$	$-5,06 \cdot 10^{-12}$	$-6,85 \cdot 10^{-12}$	$7,01 \cdot 10^{-9}$
B	10^5	$-3,10 \cdot 10^{-12}$	$-4,81 \cdot 10^{-12}$	$-6,34 \cdot 10^{-12}$	$-9,41 \cdot 10^{-12}$	$-2,26 \cdot 10^{-7}$
	N	v_T	t_N	t_T	x_N	$\gamma^3 a_N$
C	10^2	7,499850523	1154,7101677	1000,01667833597	173091029,84	9,99996914760263
C	10^3	7,499849967	1154,7101677	1000,01667833473	173091029,84	9,99996690196617
C	10^4	7,499849989	1154,7101677	1000,01667833478	173091029,84	9,99996743452330
C	10^5	7,499850786	1154,7101677	1000,01667833657	173091029,84	9,99996654696513
	N	δv_T	δt_N	δt_T	δx_N	$\delta \gamma^3 a_N$
C	10^2	$3,25 \cdot 10^{-6}$	$2,28 \cdot 10^{-11}$	$4,89 \cdot 10^{-11}$	$1,01 \cdot 10^{-10}$	$3,09 \cdot 10^{-6}$
C	10^3	$3,33 \cdot 10^{-6}$	$2,35 \cdot 10^{-11}$	$5,02 \cdot 10^{-11}$	$1,04 \cdot 10^{-10}$	$3,31 \cdot 10^{-6}$
C	10^4	$3,32 \cdot 10^{-6}$	$2,34 \cdot 10^{-11}$	$5,01 \cdot 10^{-11}$	$1,04 \cdot 10^{-10}$	$3,26 \cdot 10^{-6}$
C	10^5	$3,22 \cdot 10^{-6}$	$2,25 \cdot 10^{-11}$	$4,83 \cdot 10^{-11}$	$9,99 \cdot 10^{-11}$	$3,35 \cdot 10^{-6}$

Tab. B.4: Berechnete Werte für v_T , t_A , t_T , x_N und $\gamma^3 a_N$ nach verschiedenen Verfahren

A: Analytisch gemäß Kalkulation Gl. (6.60) bis (6.74)

B: Numerisch nach VBA-Code gemäß Abb. B.2

C: Numerisch nach VBA-Code gemäß Abb. C.2, Typ „B1“

$a_S = 10 \text{ m/s}^2$. $\Delta t_S = 1.000 \text{ s}$. Ergebnisse in km und s.

a) $v_0 = 0$, Werte für x_A berechnet aus Gl. (B.15), $x_A(3)$ und $x_A(2)$

b) $v_0 = 369 \text{ km/s}$, Werte für x_A berechnet aus Gl. (B.15), $x_A(3)$

c) $v_0 = 0,5c$, Werte für x_A berechnet aus Gl. (6.74)