

Anlage C: Relativistische Raketengleichung

C.1 Ableitung der für die Berechnung relevanten Gleichungen

Zur numerischen Berechnung werden die in Kap. 6.4.2 abgeleiteten Beziehungen

$$p_K + p'_K = (m_{K-1} - \Delta m_{K-1})v_K \gamma_K + \Delta m_{K-1} v'_K \gamma'_K = m_{K-1} v_{K-1} \gamma_{K-1} \quad (6.84)$$

und

$$v'_K = \frac{v_K + v'_0}{1 + \frac{v_K v'_0}{c^2}} \quad (6.85)$$

benutzt. Zur Bestimmung von v_K wird, wie bereits in anderen Kapiteln dargestellt, das Verfahren der Bisektion gewählt (siehe auch den Vergleich verschiedener numerischer Berechnungsverfahren in Anlage D). Grundlage ist die Impuls-Berechnung des Gesamtsystems, bestehend aus dem Impuls der Rakete p_K sowie dem des in Gegenrichtung austretenden Gases p'_K mit der Masse Δm_{K-1} , und die Ermittlung der hierzu korrespondierenden Geschwindigkeit v_K der Rakete. Aufgrund des Impulserhaltungssatzes muss der Gesamtwert vor und nach der Geschwindigkeitserhöhung durch den Masseausstoß konstant sein.

Zunächst werden geeignete Startwerte für $(v_+)_0$ und $(v_-)_0$ festgelegt; sinnvollerweise sollten diese weit auseinander liegen da sichergestellt sein muss, dass das Endergebnis v_K innerhalb dieser Grenzwerte liegt. Daraufhin wird ein neuer Index L definiert. Es wird nun der Mittelwert

$$(v_K)_{L=1} = \frac{(v_+)_0 + (v_-)_0}{2} \quad (C.01)$$

gebildet und für die hier berechnete Geschwindigkeit der Impuls gemäß Gl. (6.84) ermittelt. Es gelten dann die folgenden Festlegungen:

$$(p_K + p'_K)_{L=1} > m_{K-1} v_{K-1} \gamma_{K-1} \Rightarrow \begin{cases} (v_+)_{L=1} = (v_+)_{L=1} \\ (v_-)_{L=1} = (v_-)_0 \end{cases} \quad (C.02)$$

$$(p_K + p'_K)_{L=1} \leq m_{K-1} v_{K-1} \gamma_{K-1} \Rightarrow \begin{cases} (v_+)_{L=1} = (v_+)_{L=1} \\ (v_-)_{L=1} = (v_-)_{L=1} \end{cases} \quad (C.03)$$

Diese Berechnung wird mit steigendem Index L so lange wiederholt, bis die Ergebnisse für v_+ und v_- gleich sind. Damit ist die Geschwindigkeit der Rakete, deren Masse nun um Δm_{K-1} reduziert ist, für diesen Teilschritt bestimmt. Anschließend erfolgt der nächste Schritt für $K = 2$ usw.

Die Zeit, die subjektiv innerhalb der Rakete zwischen dem Abstrahlen von 2 Signalen verstreicht ist definitionsgemäß Δt_0 also gilt für den externen Beobachter

$$\Delta t_K = \Delta t_0 \gamma_K \quad (\text{C. 04})$$

und der dabei zurückgelegte Weg ist

$$\Delta x_K = \Delta t_K v_K \quad (\text{C. 05})$$

Nach Aufsummierung der insgesamt N Einzelwerte folgt dann

$$t_N = \sum_{K=1}^N \Delta t_0 \gamma_K \quad (\text{C. 06})$$

$$x_N = \sum_{K=1}^N \Delta t_0 v_K \quad (\text{C. 07})$$

Zu einem beliebigen Zeitpunkt t_K wird vom beschleunigten System S ein Signal an die Beobachter A und B zurückgeschickt. A hat sich zu Versuchsbeginn mit gleicher Geschwindigkeit wie die Rakete bewegt und setzt seinen Weg ohne Beschleunigung fort, während B bezüglich A eine Geschwindigkeit v_0 misst. Da A sich aus Sicht von B während der Signalausbreitung bei Werten von $v_0 \neq 0$ entweder von S entfernt oder darauf zubewegt und die Werte für Beschleunigung a_K und Geschwindigkeit v_0 jeweils positiv oder negativ sein können, müssen für die Durchführung der Berechnungen unterschiedliche Regelungen getroffen werden. Dies wurde bereits in Kap. 6.4.1 mit den Gleichungen Gl. (6.60) bis (6.74) in ähnlicher Form durchgeführt, allerdings wurde dort die Beschleunigung der Rakete über den gesamten Versuchsablauf konstant gehalten. Im Unterschied dazu stellt hier die Austrittsrichtung des Antriebsgases v' die Differenzierungsgröße dar. Ist $v' > 0$ dann ist die Beschleunigung negativ, bei $v' < 0$ ist sie positiv. Die in Kap. 6.4.1 verwendeten Gleichungen müssen daher bezüglich der Randbedingungen modifiziert werden und lauten hier

$$v' < 0 \quad (a_S > 0): \quad t_{K,R} = \frac{x_K - v_0 t_K}{c \left(1 + \frac{v_0}{c}\right)} \quad (\text{C. 08})$$

$$v' > 0 \quad (a_S < 0): \quad t_{K,R} = \frac{|x_K - v_0 t_K|}{c \left(1 - \frac{v_0}{c}\right)} \quad (\text{C. 09})$$

Damit gilt für den Grenzfall

$$v_0 = 0: \quad t_{K,R} = \frac{|x_K|}{c} \quad (\text{C. 10})$$

Allgemein folgt

$$t_T(K) = \frac{t_K + t_{K,R}}{\gamma(v_0)} \quad (\text{C. 11})$$

Für die ermittelte Endgeschwindigkeit v_N wird darüber hinaus zur besseren Vergleichbarkeit der Berechnungen für unterschiedliche Systemgeschwindigkeiten v_0 festgelegt

$$v_T = v_N - v_0 \quad (\text{C. 12})$$

C.2 Spezifische Festlegungen für die Berechnungen

Bei der Festlegung der Randbedingungen für die Berechnung ist das Verhältnis von ausströmender Masse pro Zeitintervall relevant. Um die Darstellung zu vereinfachen, wird hier die Ausgangsmasse der Rakete auf 1 normiert und das Standard-Zeitintervall, gültig subjektiv in der Rakete, auf $\Delta t_0 = 1\text{s}$ festgelegt. Daraus folgt z. B. für den Fall, wenn als Stützmasse 0,5% der Raketenmasse pro Sekunde ausströmt, dass nach dem Verbrauch von 50% der Masse insgesamt 100 Iterationsschritte durchgeführt worden sind. Dieser Fall wird für die durchgeführten Berechnungen in der Form

$$\Delta m_0 = \Delta t_0 \cdot 0,5\% \quad N/\Delta t_0 = 100 \quad (\text{C.13})$$

angegeben. Wird dann z. B. die Anzahl der Iterationsschritte um den Faktor 10 erhöht, so reduzieren sich für die nachfolgenden Berechnungen das Zeitintervall und die ausströmende Stützmasse um den gleichen Faktor.

Die Startwerte der Geschwindigkeiten $(v_+)_{L=0}$ und $(v_-)_{L=0}$ für die Bisektion sollen weit auseinander liegen, der Mittelwert muss aber ungleich Null sein, da es sonst zu Störungen bei der Berechnung kommt; es wurden $(v_+)_{L=0} = 0,9c$ und $(v_-)_{L=0} = -0,8c$ gewählt.

C.3 Flussdiagramm und VBA Programm-Code des ablaufenden Prozesses

In einem Flussdiagramm (Abb. C.1) wird gezeigt, wie das ablaufende Programm gestaltet ist. Es handelt sich um einen Prozess mit zwei ineinander geschachtelten Iterationsschleifen; die laufenden Indizes wurden mit K und L bezeichnet. Die Darstellung des VBA Programm-Codes (Abb. C.2) folgt der Darstellung im Flussdiagramm. Die für die Formelzeichen verwendeten VBA-Codes sind nachfolgender Auslistung zu entnehmen.

Wert	VBA-Code	Wert	VBA-Code	Wert	VBA-Code
v_0	v0	v'_0	v0g	Δt_0	dt0
$(v_+)_{L=0}$	vmax	$(v_-)_{L=0}$	vmin	$(v_+)_{L=0}$	vmax0
$(v_-)_{L=0}$	vmin0	t_K	tK	t_{K-1}	tKm1
t_T	tT	x_K	xK	$t_{K,R}$	tKR
$(v_K)_{L=0}$	vL	v_{K-1}	vKm1	v_K	vK
m_K	mK	Δm_0	dm0	Δm_K	dmK
p_{K-1}	pKm1	$(p_K + p'_K)_{L=0}$	pL	v'_K	vKg
$(v_K)_{L-1}$	vLm1	$(v'_K)_{L=0}$	vLg	v_T	vT
a_K	aK	γ^3	Ga3	$\gamma^3 a_K$	aKGa3

Tab. C.1: Formelzeichen und dafür genutzte VBA-Codes

Anlage C: Relativistische Raketengleichung

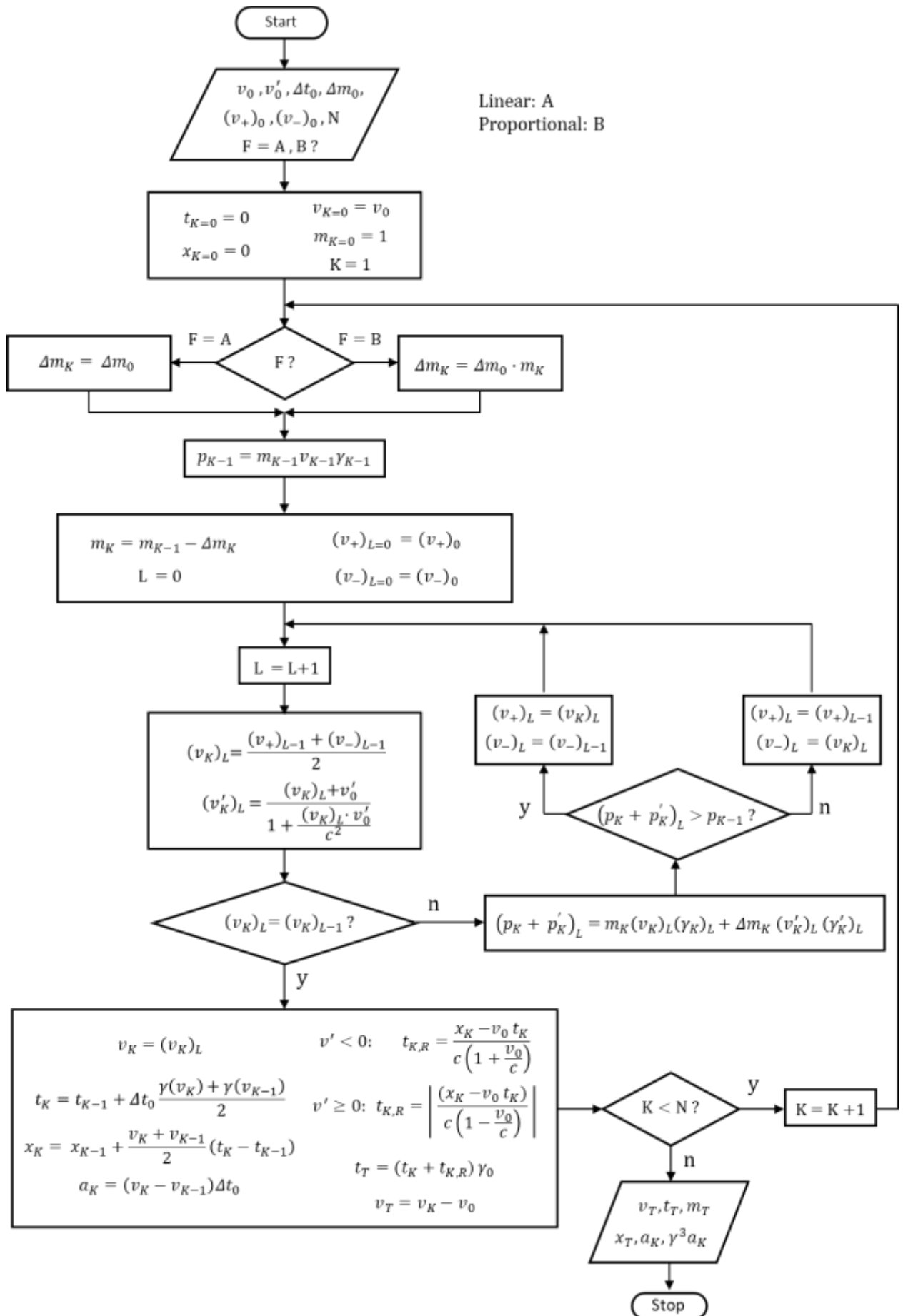


Abb. C.1: Programmablaufplan des Kalkulationsprozesses

Anlage C: Relativistische Raketengleichung

```

Sub C()
Dim v0, v0g, tS, dtS, dm0, mF, vmax0, vmin0, vmax, vmin, mK, tK As Double
Dim tKml, tKR, tT, xK, vK, vKml, dmK, pKml, pL, vL, vLml As Double
Dim N, K, L, vKg, vT, vLg, c, aK, Ga3, aKGa3 As Double
Dim F, A1, A2, B1, B2 As String
'Generelle Eingaben
    F = "B1"
    'A1, A2, B1 oder B2 definieren:
    'A: Lineare Massenabnahme, B: Prop. Massenabnahme
    '1: Def. Anzahl Iterationsschritte, 2: Def. Endmasse
    v0 = 0
    'Ausgangsgeschwindigkeit in km/s
    v0g = -4
    'Austrittsgeschwindigkeit Gas in km/s
    dm0 = 0.25 / 100
    'Ausgangswert Massenverlust in %/s
'Spezifische Angaben Def. 1
    tS = 400
    'Zeit bis zum Abstrahlen eines Signals
    N = 1000
    'Anzahl Iterationsschritte
'Spezifische Angaben Def. 2
    dtS = 1
    'Iterationszeit in s
    mF = 10 / 100
    'Masse zum Versuchsende in %
'Start Berechnung
    If F = "A1" Or F = "A2" Or F = "B1" Or F = "B2" Then
        GoTo Calc:
    Else
        Debug.Print "Eingabefehler: A1, A2, B1 oder B2 wählen"
        GoTo Out1:
    End If
Calc:
    If F = "A1" Or F = "B1" Then
        dtS = tS / N
    End If
    mK = 1
    'Ausgangswert Masse
    vmax0 = 0.9
    'Ausgangswert max. für Berechnung (im Verh. zu c)
    vmin0 = -0.8
    'Ausgangswert min. für Berechnung (im Verh. zu c)
    c = 299792.458
    'Lichtgeschwindigkeit in km/s
    tK = 0
    xK = 0
    vK = v0 / c
    v0g = v0g / c
Mainloop:
    K = K + 1
    If F = "A1" Or F = "A2" Then
        dmK = dm0 * dtS
    Else
        dmK = dm0 * dtS * mK
    End If
    pKml = mK * vK / (1 - vK ^ 2) ^ 0.5
    'Impuls Rakete für K - 1
    mK = mK - dmK
    'Rest Raketenmasse für K
    If mK <= 0 Then
        K = K - 1
        mK = mK + dmK
        Debug.Print "Raketenmasse verbraucht"
        GoTo Out2:
    End If
    vmax = vmax0
    vmin = vmin0
    'Soll: vmin0 ungleich -vmax0
    L = 0
Do
    L = L + 1
    vLml = vL
    vL = (vmax + vmin) / 2
    vLg = (vL + v0g) / (1 + vL * v0g)
    pL = mK * vL / (1 - vL ^ 2) ^ 0.5 + dmK * vLg / (1 - vLg ^ 2) ^ 0.5

```

```

If pL > pKm1 Then
    vmax = vL
Else: vmin = vL
End If
Loop Until vLm1 = vL
    vKm1 = vK
    vK = vL
    vKg = vLg
    tKm1 = tK
    tK = tK + dtS * (1 / (1 - vK ^ 2) ^ 0.5 + 1 / (1 - vKm1 ^ 2) ^ 0.5) / 2
    xK = xK + (vK + vKm1) / 2 * (tK - tKm1) * c
    aK = (vK - vKm1) / (dtS / (1 - ((vK + vKm1) / 2) ^ 2) ^ 0.5) * c * 1000
    Ga3 = (1 / (1 - ((vK + vKm1) / 2) ^ 2)) ^ 1.5
    If v0g > 0 Then
        tKR = Abs(xK - v0 * tK) / c / (1 - v0 / c)
    Else: tKR = (xK - v0 * tK) / c / (1 + v0 / c)
    End If
    tT = (tK + tKR) * (1 - (v0 / c) ^ 2) ^ 0.5
    vT = (vK * c - v0)
    aKGa3 = aK * Ga3
    If F = "A1" Or F = "B1" Then
        If K < N Then
            GoTo Mainloop:
        End If
    End If
    If F = "A2" Or F = "B2" Then
        If mK > mF Then
            GoTo Mainloop:
        End If
    End If
Out2:
'Ergenisdarstellung: Berechnete Werte aus Sicht eines ruhenden Beobachters
Debug.Print "vT =", vT 'Geschwindigkeit beim Abstrahlen des Signals in km/s
Debug.Print "tN =", tK 'Gesamtzeit bis zum Abstrahlen des Signals in s
Debug.Print "tT =", tT 'Gesamtzeit bis zum Empfang des Signals in s
Debug.Print "mN =", mK 'Raketenmasse beim Abstrahlen im Verhältnis zu 1
Debug.Print "xN =", xK 'Zurückgelegter Weg beim Abstrahlen des Signals in km
Debug.Print "aN =", aK 'Beschleunigung in m/s²
Debug.Print "aNGa3 =", aKGa3 'Beschleunigung * Gamma ^ 3 in m/s²
Out1:
End Sub

```

Abb. C2: VBA Programm-Code für Kalkulationsprozess C aus Abb. C1

In den nachfolgenden Tabellen Tab. C.2, Tab. C.3 und Tab. C.4 sind ergänzende Berechnungen entsprechend Tab. 6.4 aus Kap. 6.4.2 dargestellt. Statt der Nutzung des Programms „A1“ hätte auch die Variante „A2“ gewählt werden können. Dabei wird dann der gewünschte Endwert der Raketenmasse und die Iterationszeit vorgegeben; die Anzahl der Iterationsschritte ergibt sich aus der Berechnung. Beispiel aus Tab C2: Parameter „A1“ $t_s = 100\text{s}$, $N = 1000$ entsprechen „A2“ $m_F = 50\%$ und $\Delta t_s = 0,1\text{s}$. Der berechnete Wert für K ist dann $N = 1001$. Die Ergebnisse sind sehr ähnlich, aber nicht völlig identisch. Da in diesem Fall der Einfluss der Anzahl der Iterationsschritte im Vordergrund stand wurde „A1“ gewählt.

Für Vergleichsbetrachtungen sind insbesondere die Werte von t_T interessant, da sie wegen der einfachen Nutzung von Präzisionsuhren einer experimentellen Prüfung zugänglich wären. Die hier gewonnenen Ergebnisse von t_T wurden in Tab. 6.6 und 6.7 sowie Abb. 6.4 gesondert dargestellt, zeigen aber keine systematischen Unterschiede, so dass auch hier das Relativitätsprinzip gewahrt ist.

Anlage C: Relativistische Raketengleichung

N	v_T	t_T	m_N	x_N	N	v_T	t_T	m_N	x_N
10	2,67508561278727	100,000397329364	0,500000000000000	119,116010675216	10	2,67508515022224	100,000397329361	0,500000000000000	37019,1440520908
10 ¹	2,76261372200990	100,000408141269	0,500000000000000	122,357320955608	10 ¹	2,76260948280941	100,000408141266	0,500000000000000	37022,3853647753
10 ²	2,77158897232187	100,000409292747	0,500000000000055	122,70252336750	10 ²	2,77158471909860	100,000409292744	0,500000000000055	37022,7305674122
10 ³	2,77248872482278	100,000409408634	0,500000000000055	122,737265091767	10 ³	2,77248447045912	100,000409408630	0,500000000000055	37022,7653092072
10 ⁴	2,77257872237194	100,000409420246	0,4999999999996724	122,740741494222	10 ⁴	2,77257447227356	100,000409420227	0,4999999999996724	37022,7687858303
10 ⁵	2,77258772224753	100,000409422400	0,5000000000004133	122,741089155569	10 ⁵	2,77258347644647	100,000409421377	0,5000000000004133	37022,7691339111
10 ⁶	2,77258862465211	100,000409440862	0,4999999999708066	122,741124020357	10 ⁶	2,77258481950150	100,000409421716	0,4999999999708066	37022,7691906506
	δv_T	δt_T	δm_N	δx_N		δv_T	δt_T	δm_N	δx_N
$\bar{x}$	8,9931	$1,4064 \cdot 10^{-3}$		$3,4698 \cdot 10^{-7}$	$\bar{x}$	8,9943	$1,1550 \cdot 10^{-3}$		$3,4709 \cdot 10^{-7}$
10 ¹	$8,7528 \cdot 10^{-2}$	$1,0812 \cdot 10^{-5}$	0	3,2413	10 ¹	$8,7528 \cdot 10^{-2}$	$1,0812 \cdot 10^{-5}$	0	3,2413
10 ²	$8,9753 \cdot 10^{-3}$	$1,1515 \cdot 10^{-6}$	$5,4956 \cdot 10^{-14}$	$3,4520 \cdot 10^{-5}$	10 ²	$8,9752 \cdot 10^{-3}$	$1,1515 \cdot 10^{-6}$	$5,4956 \cdot 10^{-14}$	$3,4520 \cdot 10^{-5}$
10 ³	$8,9975 \cdot 10^{-4}$	$1,1589 \cdot 10^{-7}$	0	$3,4742 \cdot 10^{-2}$	10 ³	$8,9975 \cdot 10^{-4}$	$1,1589 \cdot 10^{-7}$	0	$3,4742 \cdot 10^{-2}$
10 ⁴	$8,9998 \cdot 10^{-5}$	$1,1612 \cdot 10^{-8}$	$-3,3309 \cdot 10^{-12}$	$3,4764 \cdot 10^{-3}$	10 ⁴	$9,0002 \cdot 10^{-5}$	$1,1597 \cdot 10^{-8}$	$-3,3309 \cdot 10^{-12}$	$3,4766 \cdot 10^{-3}$
10 ⁵	$8,9998 \cdot 10^{-6}$	$2,1540 \cdot 10^{-9}$	$4,4409 \cdot 10^{-11}$	$3,4766 \cdot 10^{-4}$	10 ⁵	$9,0042 \cdot 10^{-6}$	$1,1500 \cdot 10^{-9}$	$4,4409 \cdot 10^{-11}$	$3,4808 \cdot 10^{-4}$
10 ⁶	$9,0240 \cdot 10^{-7}$	$1,8462 \cdot 10^{-10}$	$-3,3307 \cdot 10^{-10}$	$3,4865 \cdot 10^{-5}$	10 ⁶	$1,3431 \cdot 10^{-6}$	$3,3900 \cdot 10^{-10}$	$-3,3307 \cdot 10^{-10}$	$5,6740 \cdot 10^{-5}$
10 ⁸	$8,9931 \cdot 10^{-8}$	$1,4069 \cdot 10^{-11}$		$3,4698 \cdot 10^{-8}$	10 ⁸	$8,9943 \cdot 10^{-8}$	$1,1553 \cdot 10^{-11}$		$3,4709 \cdot 10^{-8}$
10 ⁹	$8,9931 \cdot 10^{-9}$	$1,4069 \cdot 10^{-12}$		$3,4698 \cdot 10^{-7}$	10 ⁹	$8,9943 \cdot 10^{-9}$	$1,1511 \cdot 10^{-12}$		$3,4709 \cdot 10^{-7}$
10 ¹⁰	$8,9931 \cdot 10^{-10}$	$1,4211 \cdot 10^{-13}$		$3,4698 \cdot 10^{-6}$	10 ¹⁰	$8,9943 \cdot 10^{-10}$	$1,1369 \cdot 10^{-13}$		$3,4706 \cdot 10^{-6}$
10 ¹¹	$8,9931 \cdot 10^{-11}$	0		$3,4698 \cdot 10^{-9}$	10 ¹¹	$8,9943 \cdot 10^{-11}$	0		$3,4706 \cdot 10^{-9}$
10 ¹²	$8,9933 \cdot 10^{-12}$	0		$3,4699 \cdot 10^{-10}$	10 ¹²	$8,9941 \cdot 10^{-12}$	0		$3,4925 \cdot 10^{-10}$
10 ¹³	$8,9928 \cdot 10^{-13}$	0		$3,4703 \cdot 10^{-11}$	10 ¹³	$8,9928 \cdot 10^{-13}$	0		0
10 ¹⁴	$9,0150 \cdot 10^{-14}$	0		$3,4674 \cdot 10^{-12}$	10 ¹⁴	$9,0150 \cdot 10^{-14}$	0		0
10 ¹⁵	$8,8818 \cdot 10^{-15}$	0		$3,4106 \cdot 10^{-13}$	10 ¹⁵	$8,8818 \cdot 10^{-15}$	0		0
10 ¹⁶	0	0		0	10 ¹⁶	0	0		0
	v_T	t_T		x_N		v_T	t_T		x_N
10 ⁷	2,77258862155768	100,000409422541		122,741123853607	10 ⁷	2,77258437587408	100,000409421493		37022,7691686202
10 ⁸	2,77258871148869	100,000409422555		122,741127323411	10 ⁸	2,77258446581684	100,000409421504		37022,7691720911
10 ⁹	2,77258872048179	100,000409422556		122,741127670391	10 ⁹	2,77258447481111	100,000409421505		37022,7691724381
10 ¹⁰	2,77258872138110	100,000409422556		122,741127705089	10 ¹⁰	2,77258447571054	100,000409421505		37022,7691724729
10 ¹¹	2,77258872147103	100,000409422556		122,741127708559	10 ¹¹	2,77258447580048	100,000409421505		37022,7691724764
10 ¹²	2,77258872148003	100,000409422556		122,741127708906	10 ¹²	2,77258447580948	100,000409421505		37022,7691724767
10 ¹³	2,77258872148093	100,000409422556		122,741127708941	10 ¹³	2,77258447581038	100,000409421505		37022,7691724768
10 ¹⁴	2,77258872148102	100,000409422556		122,741127708944	10 ¹⁴	2,77258447581047	100,000409421505		37022,7691724768
10 ¹⁵	2,77258872148102	100,000409422556		122,741127708945	10 ¹⁵	2,77258447581048	100,000409421505		37022,7691724768
10 ¹⁶	2,77258872148102	100,000409422556		122,741127708945	10 ¹⁶	2,77258447581048	100,000409421505		37022,7691724768

a)
b)

N	v_T	t_T	m_N	x_N	N	v_T	t_T	m_N	x_N
10	2,67496628539311	100,000397329348	0,500000000000000	200123,569407464	10	2,67210782993243	100,000397329281	0,500000000000000	1000675,97202456
10 ¹	2,76249047724150	100,000408141251	0,500000000000000	200126,810789598	10 ¹	2,75953844190371	100,000408141179	0,500000000000000	1000679,21513818
10 ²	2,77146532579354	100,000409292729	0,500000000000055	200127,155999630	10 ²	2,76850369436397	100,000409292656	0,500000000000055	1000679,56053261
10 ³	2,77236503944528	100,000409408616	0,500000000000055	200127,190742224	10 ³	2,76940245165497	100,000409408544	0,500000000000055	1000679,59529404
10 ⁴	2,77245505647284	100,000409420216	0,4999999999996724	200127,194219809	10 ⁴	2,76949246576442	100,000409420158	0,4999999999996724	1000679,59877786
10 ⁵	2,77246407688722	100,000409421380	0,5000000000004133	200127,194569079	10 ⁵	2,76950155149825	100,000409421342	0,5000000000004133	1000679,59913297
10 ⁶	2,77246734040796	100,000409422016	0,4999999999708066	200127,194715347	10 ⁶	2,76951415107033	100,000409423363	0,4999999999708066	1000679,59971782
	δv_T	δt_T	δm_N	δx_N		δv_T	δt_T	δm_N	δx_N
$\bar{x}$	8,9985	$1,1586 \cdot 10^{-3}$		$3,4742 \cdot 10^{-7}$	$\bar{x}$	9,0100	$1,1639 \cdot 10^{-3}$		$3,4913 \cdot 10^{-7}$
10 ¹	$8,7524 \cdot 10^{-2}$	$1,0812 \cdot 10^{-5}$	0	3,2414	10 ¹	$8,7431 \cdot 10^{-2}$	$1,0812 \cdot 10^{-5}$	0	3,2431
10 ²	$8,9748 \cdot 10^{-3}$	$1,1515 \cdot 10^{-6}$	$5,4956 \cdot 10^{-14}$	$3,4521 \cdot 10^{-5}$	10 ²	$8,9653 \cdot 10^{-3}$	$1,1515 \cdot 10^{-6}$	$5,4956 \cdot 10^{-14}$	$3,4539 \cdot 10^{-5}$
10 ³	$8,9971 \cdot 10^{-4}$	$1,1589 \cdot 10^{-7}$	0	$3,4743 \cdot 10^{-2}$	10 ³	$8,9876 \cdot 10^{-4}$	$1,1589 \cdot 10^{-7}$	0	$3,4761 \cdot 10^{-2}$
10 ⁴	$9,0017 \cdot 10^{-5}$	$1,1600 \cdot 10^{-8}$	$-3,3309 \cdot 10^{-12}$	$3,4776 \cdot 10^{-3}$	10 ⁴	$9,0014 \cdot 10^{-5}$	$1,1614 \cdot 10^{-8}$	$-3,3309 \cdot 10^{-12}$	$3,4838 \cdot 10^{-3}$
10 ⁵	$9,0204 \cdot 10^{-6}$	$1,1640 \cdot 10^{-9}$	$4,4409 \cdot 10^{-11}$	$3,4927 \cdot 10^{-4}$	10 ⁵	$9,0857 \cdot 10^{-6}$	$1,1840 \cdot 10^{-9}$	$4,4409 \cdot 10^{-11}$	$3,5511 \cdot 10^{-4}$
10 ⁶	$3,2635 \cdot 10^{-6}$	$6,3601 \cdot 10^{-10}$	$-3,3307 \cdot 10^{-10}$	$1,4627 \cdot 10^{-4}$	10 ⁶	$1,2600 \cdot 10^{-5}$	$2,0210 \cdot 10^{-9}$	$-3,3307 \cdot 10^{-10}$	$5,8485 \cdot 10^{-4}$
10 ⁸	$8,9985 \cdot 10^{-8}$	$1,1582 \cdot 10^{-11}$		$3,4742 \cdot 10^{-8}$	10 ⁸	$9,0100 \cdot 10^{-8}$	$1,1639 \cdot 10^{-11}$		$3,4913 \cdot 10^{-8}$
10 ⁹	$8,9985 \cdot 10^{-9}$	$1,1653 \cdot 10^{-12}$		$3,4741 \cdot 10^{-7}$	10 ⁹	$9,0100 \cdot 10^{-9}$	$1,1653 \cdot 10^{-12}$		$3,4913 \cdot 10^{-7}$
10 ¹⁰	$8,9985 \cdot 10^{-10}$	$1,1369 \cdot 10^{-13}$		$3,4750 \cdot 10^{-6}$	10 ¹⁰	$9,0100 \cdot 10^{-10}$	$1,1369 \cdot 10^{-13}$		$3,4925 \cdot 10^{-6}$
10 ¹¹	$8,9985 \cdot 10^{-11}$	0		$3,4634 \cdot 10^{-9}$	10 ¹¹	$9,0100 \cdot 10^{-11}$	0		$3,4925 \cdot 10^{-9}$
10 ¹²	$8,9986 \cdot 10^{-12}$	0		$3,4925 \cdot 10^{-10}$	10 ¹²	$9,0101 \cdot 10^{-12}$	0		0
10 ¹³	$8,9972 \cdot 10^{-13}$	0		0	10 ¹³	$9,0106 \cdot 10^{-13}$	0		0
10 ¹⁴	$9,0150 \cdot 10^{-14}$	0		0	10 ¹⁴	$9,0150 \cdot 10^{-14}$	0		0
10 ¹⁵	$8,8818 \cdot 10^{-15}$	0		0	10 ¹⁵	$8,8818 \cdot 10^{-15}$	0		0
10 ¹⁶	0	0		0	10 ¹⁶	0	0		0
	v_T	t_T		x_N		v_T	t_T		x_N
10 ⁷	2,77246497673978	100,000409421496		200127,194603821	10 ⁷	2,76950245249750	100,000409421458		1000679,59916788
10 ⁸	2,77246506672503	100,000409421507		200127,194607295	10 ⁸	2,76950254259743	100,000409421470		1000679,59917137
10 ⁹	2,77246507572356	100,000409421509		200127,194607642	10 ⁹	2,76950255160742	100,000409421471		1000679,59917172
10 ¹⁰	2,77246507662341	100,000409421509		200127,194607677	10 ¹⁰	2,76950255250842	100,000409421471		1000679,59917176
10 ¹¹	2,77246507671339	100,000409421509		200127,194607680	10 ¹¹	2,76950255259852	100,000409421471		1000679,59917176
10 ¹²	2,77246507672239	100,000409421509		200127,194607681	10 ¹²	2,76950255260753	100,000409421471		1000679,59917176
10 ¹³	2,77246507672329	100,000409421509		200127,194607681	10 ¹³	2,76950255260843	100,000409421471		1000679,59917176
10 ¹⁴	2,77246507672338	100,000409421509		200127,194607681	10 ¹⁴	2,76950255260852	100,000409421471		1000679,59917176
10 ¹⁵	2,77246507672339	100,000409421509		200127,194607681	10 ¹⁵	2,76950255260853	100,000409421471		1000679,59917176
10 ¹⁶	2,77246507672339	100,000409421509		200127,194607681	10 ¹⁶	2,76950255260853	100,000409421471		1000679,59917176

c)
d)

Tab: C.2: Berechnung der relativistischen Raketengeschwindigkeit gemäß Programm
Typ: A1, $v_0' = -4$ km/s, $\Delta m_0 = 0,5\%$, $t_0 = 100$ s
a) $v_0 = 0$, b) $v_0 = 369$ km/s, c) $v_0 = 2.000$ km/s, d) $v_0 = 10.000$ km/s

Anlage C: Relativistische Raketengleichung

N	v_T	t_T	m_N	x_N
10	7,84085772014717	1000,00912888441	0,100000000000000	2736,750700612000
10 ¹	9,05101119073233	1000,00983714046	0,099999999999999	2949,077033897790
10 ²	9,19416709875657	1000,00991970498	0,099999999999989	2973,828794295530
10 ³	9,20872063626419	1000,00992810957	0,099999999999856	2976,348382091860
10 ⁴	9,21017837171215	1000,00992895150	0,0999999999998368	2976,600796650620
10 ⁵	9,21032416890996	1000,00992904517	0,1000000000009585	2976,626042686920
10 ⁶	9,21033875458106	1000,00992885138	0,0999999999922464	2976,628567836020
	δv_T	δt_T	δm_N	δx_N
$\bar{x}$	$1,4507 \cdot 10^2$	$8,6118 \cdot 10^{-2}$		$2,5109 \cdot 10^4$
10 ¹	1,2102	$7,0826 \cdot 10^{-4}$	$-8,0491 \cdot 10^{-16}$	$2,1233 \cdot 10^3$
10 ²	$1,4316 \cdot 10^{-1}$	$8,2565 \cdot 10^{-9}$	$-1,0700 \cdot 10^{-14}$	$2,4752 \cdot 10^1$
10 ³	$1,4554 \cdot 10^{-2}$	$8,4046 \cdot 10^{-6}$	$-1,3300 \cdot 10^{-13}$	2,5196
10 ⁴	$1,4577 \cdot 10^{-3}$	$8,4193 \cdot 10^{-7}$	$-1,4880 \cdot 10^{-12}$	$2,5241 \cdot 10^{-1}$
10 ⁵	$1,4580 \cdot 10^{-4}$	$9,3670 \cdot 10^{-8}$	$1,1217 \cdot 10^{-11}$	$2,5246 \cdot 10^{-2}$
10 ⁶	$1,4586 \cdot 10^{-5}$	$-1,9379 \cdot 10^{-7}$	$-8,7121 \cdot 10^{-11}$	$2,5251 \cdot 10^{-3}$
10 ⁷	$1,4507 \cdot 10^{-6}$	$8,6118 \cdot 10^{-10}$		$2,5109 \cdot 10^{-4}$
10 ⁸	$1,4507 \cdot 10^{-7}$	$8,6175 \cdot 10^{-11}$		$2,5109 \cdot 10^{-5}$
10 ⁹	$1,4507 \cdot 10^{-8}$	$8,6402 \cdot 10^{-12}$		$2,5109 \cdot 10^{-6}$
10 ¹⁰	$1,4507 \cdot 10^{-9}$	$9,0949 \cdot 10^{-13}$		$2,5109 \cdot 10^{-7}$
10 ¹¹	$1,4507 \cdot 10^{-10}$	0		$2,5109 \cdot 10^{-8}$
10 ¹²	$1,4506 \cdot 10^{-11}$	0		$2,5107 \cdot 10^{-9}$
10 ¹³	$1,4513 \cdot 10^{-12}$	0		$2,5102 \cdot 10^{-10}$
10 ¹⁴	$1,4566 \cdot 10^{-13}$	0		$2,5011 \cdot 10^{-11}$
10 ¹⁵	$1,4211 \cdot 10^{-14}$	0		0
	v_T	t_T		x_N
10 ⁷	9,21033867546060	1000,00992905378		2976,62855365180
10 ⁸	9,21034012611567	1000,00992905464		2976,628804653010
10 ⁹	9,21034027118117	1000,00992905473		2976,628829761790
10 ¹⁰	9,21034028568772	1000,00992905474		2976,628832272670
10 ¹¹	9,21034028713838	1000,00992905474		2976,628832523760
10 ¹²	9,21034028728345	1000,00992905474		2976,628832548870
10 ¹³	9,21034028729795	1000,00992905474		2976,628832551380
10 ¹⁴	9,21034028729940	1000,00992905474		2976,628832551630
10 ¹⁵	9,21034028729955	1000,00992905474		2976,628832551650
10 ¹⁶	9,21034028729956	1000,00992905474		2976,628832551660

a)

N	v_T	t_T	m_N	x_N
10	7,84050712993712	1000,00912888406	0,100000000000000	2002781,31911852
10 ¹	9,05060615444427	1000,00983714003	0,099999999999999	2002993,65017758
10 ²	9,19375561457377	1000,00991970454	0,099999999999989	2003018,40248872
10 ³	9,20830849818162	1000,00992810913	0,099999999999856	2003020,92213354
10 ⁴	9,20976618582245	1000,00992895115	0,0999999999998368	2003021,17456373
10 ⁵	9,20991210652369	1000,00992903552	0,1000000000009585	2003021,19985815
10 ⁶	9,20992848275819	1000,00992904651	0,0999999999922464	2003021,20324950
	δv_T	δt_T	δm_N	δx_N
$\bar{x}$	$1,4509 \cdot 10^2$	$8,3796 \cdot 10^{-2}$		$2,5122 \cdot 10^4$
10 ¹	1,2101	$7,0826 \cdot 10^{-4}$	$-8,0491 \cdot 10^{-16}$	$2,1233 \cdot 10^3$
10 ²	$1,4315 \cdot 10^{-1}$	$8,2565 \cdot 10^{-9}$	$-1,0700 \cdot 10^{-14}$	$2,4752 \cdot 10^1$
10 ³	$1,4553 \cdot 10^{-2}$	$8,4046 \cdot 10^{-6}$	$-1,3300 \cdot 10^{-13}$	2,5196
10 ⁴	$1,4577 \cdot 10^{-3}$	$8,4202 \cdot 10^{-7}$	$-1,4880 \cdot 10^{-12}$	$2,5243 \cdot 10^{-1}$
10 ⁵	$1,4592 \cdot 10^{-4}$	$8,4370 \cdot 10^{-8}$	$1,1217 \cdot 10^{-11}$	$2,5294 \cdot 10^{-2}$
10 ⁶	$1,6376 \cdot 10^{-5}$	$1,0990 \cdot 10^{-8}$	$-8,7121 \cdot 10^{-11}$	$3,3913 \cdot 10^{-3}$
10 ⁷	$1,4509 \cdot 10^{-6}$	$8,3795 \cdot 10^{-10}$		$2,5122 \cdot 10^{-4}$
10 ⁸	$1,4509 \cdot 10^{-7}$	$8,3787 \cdot 10^{-11}$		$2,5121 \cdot 10^{-5}$
10 ⁹	$1,4509 \cdot 10^{-8}$	$8,4128 \cdot 10^{-12}$		$2,5122 \cdot 10^{-6}$
10 ¹⁰	$1,4509 \cdot 10^{-9}$	0		$2,5122 \cdot 10^{-7}$
10 ¹¹	$1,4509 \cdot 10^{-10}$	0		$2,5146 \cdot 10^{-8}$
10 ¹²	$1,4509 \cdot 10^{-11}$	0		$2,5611 \cdot 10^{-9}$
10 ¹³	$1,4513 \cdot 10^{-12}$	0		0
10 ¹⁴	$1,4566 \cdot 10^{-13}$	0		0
10 ¹⁵	$1,4211 \cdot 10^{-14}$	0		0
	v_T	t_T		x_N
10 ⁷	9,20992661571773	1000,00992904390		2003021,20237030
10 ⁸	9,20992806663713	1000,00992904474		2003021,20262152
10 ⁹	9,20992821172907	1000,00992904482		2003021,20264664
10 ¹⁰	9,20992822623827	1000,00992904483		2003021,20264915
10 ¹¹	9,20992822768919	1000,00992904483		2003021,20264941
10 ¹²	9,20992822783428	1000,00992904483		2003021,20264943
10 ¹³	9,20992822784879	1000,00992904483		2003021,20264943
10 ¹⁴	9,20992822785024	1000,00992904483		2003021,20264943
10 ¹⁵	9,20992822785039	1000,00992904483		2003021,20264943
10 ¹⁶	9,20992822785040	1000,00992904483		2003021,20264943

c)

N	v_T	t_T	m_N	x_N
10	7,84084554146182	1000,00912888434	0,100000000000000	371737,0322956670
10 ¹	9,05099707036669	1000,00983714038	0,099999999999999	371949,3587899240
10 ²	9,19415274738003	1000,00991970490	0,099999999999989	371974,1105690590
10 ³	9,20870626170580	1000,00992810949	0,099999999999856	371976,6301589470
10 ⁴	9,21016399816938	1000,00992895148	0,0999999999998368	371976,8825756170
10 ⁵	9,21030981978799	1000,00992903570	0,1000000000009585	371976,9078311300
10 ⁶	9,21032474295856	1000,00992904906	0,0999999999922464	371976,9105254130
	δv_T	δt_T	δm_N	δx_N
$\bar{x}$	$1,4507 \cdot 10^2$	$8,3757 \cdot 10^{-2}$		$2,5111 \cdot 10^4$
10 ¹	1,2102	$7,0826 \cdot 10^{-4}$	$-8,0491 \cdot 10^{-16}$	$2,1233 \cdot 10^3$
10 ²	$1,4316 \cdot 10^{-1}$	$8,2565 \cdot 10^{-9}$	$-1,0700 \cdot 10^{-14}$	$2,4752 \cdot 10^1$
10 ³	$1,4554 \cdot 10^{-2}$	$8,4046 \cdot 10^{-6}$	$-1,3300 \cdot 10^{-13}$	2,5196
10 ⁴	$1,4577 \cdot 10^{-3}$	$8,4199 \cdot 10^{-7}$	$-1,4880 \cdot 10^{-12}$	$2,5242 \cdot 10^{-1}$
10 ⁵	$1,4582 \cdot 10^{-4}$	$8,4220 \cdot 10^{-8}$	$1,1217 \cdot 10^{-11}$	$2,5256 \cdot 10^{-2}$
10 ⁶	$1,4923 \cdot 10^{-5}$	$1,3360 \cdot 10^{-8}$	$-8,7121 \cdot 10^{-11}$	$2,6943 \cdot 10^{-3}$
10 ⁷	$1,4507 \cdot 10^{-6}$	$8,3753 \cdot 10^{-10}$		$2,5111 \cdot 10^{-4}$
10 ⁸	$1,4507 \cdot 10^{-7}$	$8,3787 \cdot 10^{-11}$		$2,5111 \cdot 10^{-5}$
10 ⁹	$1,4507 \cdot 10^{-8}$	$8,4128 \cdot 10^{-12}$		$2,5111 \cdot 10^{-6}$
10 ¹⁰	$1,4507 \cdot 10^{-9}$	0		$2,5111 \cdot 10^{-7}$
10 ¹¹	$1,4507 \cdot 10^{-10}$	0		$2,5088 \cdot 10^{-8}$
10 ¹²	$1,4508 \cdot 10^{-11}$	0		$2,5029 \cdot 10^{-9}$
10 ¹³	$1,4513 \cdot 10^{-12}$	0		0
10 ¹⁴	$1,4566 \cdot 10^{-13}$	0		0
10 ¹⁵	$1,4211 \cdot 10^{-14}$	0		0
	v_T	t_T		x_N
10 ⁷	9,21032432694012	1000,00992904408		371976,9103422510
10 ⁸	9,21032577765533	1000,00992904491		371976,9105933640
10 ⁹	9,21032592272685	1000,00992904500		371976,9106184750
10 ¹⁰	9,21032593723401	1000,00992904501		371976,9106209860
10 ¹¹	9,21032593868472	1000,00992904501		371976,9106212370
10 ¹²	9,21032593882979	1000,00992904501		371976,9106212620
10 ¹³	9,21032593884430	1000,00992904501		371976,9106212650
10 ¹⁴	9,21032593884575	1000,00992904501		371976,9106212650
10 ¹⁵	9,21032593884590	1000,00992904501		371976,9106212650
10 ¹⁶	9,21032593884591	1000,00992904501		371976,9106212650

b)

N	v_T	t_T	m_N	x_N
10	7,83212547315452	1000,00912888264	0,100000000000000	10008306,1716827
10 ¹	9,04092953464169	1000,00983713831	0,099999999999999	10008518,6162407
10 ²	9,18392577772829	1000,00991970277	0,099999999999989	10008543,3817823
10 ³	9,19846309125933	1000,00992810738	0,099999999999856	10008545,9027777
10 ⁴	9,19999128923446	1000,00992894953	0,0999999999998368	10008546,1553823
10 ⁵	9,20006556392400	1000,00992903452	0,1000000000009585	10008546,1808763
10 ⁶	9,20008899787535	1000,00992905726	0,0999999999922464	10008546,1876819
	δv_T	δt_T	δm_N	δx_N
$\bar{x}$	$1,4507 \cdot 10^2$	$8,3954 \cdot 10^{-2}$		$2,5182 \cdot 10^4$
10 ¹	1,2088	$7,0826 \cdot 10^{-4}$	$-8,0491 \cdot 10^{-16}$	$2,1244 \cdot 10^3$
10 ²	$1,4300 \cdot 10^{-1}$	$8,2564 \cdot 10^{-9}$	$-1,0700 \cdot 10^{-14}$	$2,4766 \cdot 10^1$
10 ³	$1,4537 \cdot 10^{-2}$	$8,4046 \cdot 10^{-6}$	$-1,3300 \cdot 10^{-13}$	2,5210
10 ⁴	$1,4562 \cdot 10^{-3}$	$8,4215 \cdot 10^{-7}$	$-1,4880 \cdot 10^{-12}$	$2,5260 \cdot 10^{-1}$
10 ⁵	$1,4562 \cdot 10^{-4}$	$8,4990 \cdot 10^{-8}$	$1,1217 \cdot 10^{-11}$	$2,5494 \cdot 10^{-2}$
10 ⁶	$2,3434 \cdot 10^{-5}$	$2,2740 \cdot 10^{-8}$	$-8,7121 \cdot 10^{-11}$	$6,8056 \cdot 10^{-3}$
10 ⁷	$1,4507 \cdot 10^{-6}$	$8,3958 \cdot 10^{-10}$		$2,5182 \cdot 10^{-4}$
10 ⁸	$1,4507 \cdot 10^{-7}$	$8,3901 \cdot 10^{-11}$		$2,5183 \cdot 10^{-5}$
10 ⁹	$1,4507 \cdot 10^{-8}$	$8,4128 \cdot 10^{-12}$		$2,5183 \cdot 10^{-6}$
10 ¹⁰	$1,4507 \cdot 10^{-9}$	0		$2,5146 \cdot 10^{-7}$
10 ¹¹	$1,4507 \cdot 10^{-10}$	0		$2,6077 \cdot 10^{-8}$
10 ¹²	$1,4506 \cdot 10^{-11}$	0		0
10 ¹³	$1,4513 \cdot 10^{-12}$	0		0
10 ¹⁴	$1,4566 \cdot 10^{-13}$	0		0
10 ¹⁵	$1,4211 \cdot 10^{-14}$	0		0
	v_T	t_T		x_N
10 ⁷	9,20008007052064	1000,00992904292		10008546,1833945
10 ⁸	9,20008152118030	1000,00992904376		10008546,1836464
10 ⁹	9,20008166624627	1000,00992904384		10008546,1836716
10 ¹⁰	9,20008168075286	1000,00992904385		10008546,1836741
10 ¹¹	9,20008168220352	1000,00992904385		10008546,1836

Tab. C.3: Berechnung der relativistischen Raketengeschwindigkeit gemäß Programm
 Typ: A1, $v'_0 = -4$ km/s, $\Delta m_0 = 0,09\%$, $t_0 = 1.000$ s
 a) $v_0 = 0$, b) $v_0 = 369$ km/s, c) $v_0 = 2.000$ km/s, d) $v_0 = 10.000$ km/s

Anlage C: Relativistische Raketengleichung

N	v_F	t_F	m_N	x_N	N	v_F	t_F	m_N	x_N
10	196,021417688228	10002,2826214110	0,100000000000000	684187,711109235	10	196,020933328363	10002,2826210019	0,100000000000000	4374191,05576218
10 ¹	226,275235660056	10002,4597552575	0,099999999999999	737269,299206788	10 ¹	226,274637774396	10002,4597547615	0,099999999999999	4427272,68489423
10 ²	229,854130642931	10002,4804055720	0,099999999999989	743457,239721413	10 ²	229,853518480855	10002,4804050636	0,099999999999989	4433460,62991467
10 ³	230,217968797944	10002,4825076705	0,099999999999856	744087,136710344	10 ³	230,217355174200	10002,4825071609	0,099999999999856	4434090,52736042
10 ⁴	230,254412155672	10002,4827182607	0,099999999998368	744150,240353761	10 ⁴	230,253798388818	10002,4827177511	0,099999999998368	4434153,63106899
10 ⁵	230,258057081830	10002,4827393235	0,1000000000009585	744156,551855839	10 ⁵	230,257443325741	10002,4827388142	0,1000000000009585	4434159,94267449
10 ⁷	230,2584217113536	10002,4827414384	0,099999999922464	744157,183283767	10 ⁷	230,257808300206	10002,4827409268	0,099999999922464	4434160,57580526
	δv_F	δt_F	δm_N	δx_N		δv_F	δt_F	δm_N	δx_N
$\bar{x}$	$3,6266 \cdot 10^{-2}$	$2,0948 \cdot 10^{-1}$		$6,2771 \cdot 10^{-6}$	$\bar{x}$	$3,6266 \cdot 10^{-2}$	$2,0948 \cdot 10^{-1}$		$6,2772 \cdot 10^{-6}$
10 ²	$3,0254 \cdot 10^{-1}$	$1,7713 \cdot 10^{-1}$	$-8,0491 \cdot 10^{-16}$	$5,3082 \cdot 10^{-4}$	10 ²	$3,0254 \cdot 10^{-1}$	$1,7713 \cdot 10^{-1}$	$-8,0491 \cdot 10^{-16}$	$5,3082 \cdot 10^{-4}$
10 ³	3,5789	$2,0650 \cdot 10^{-2}$	$-1,0700 \cdot 10^{-14}$	$6,1879 \cdot 10^{-2}$	10 ³	3,5789	$2,0650 \cdot 10^{-2}$	$-1,0700 \cdot 10^{-14}$	$6,1879 \cdot 10^{-2}$
10 ⁴	$3,6384 \cdot 10^{-1}$	$2,1021 \cdot 10^{-2}$	$-1,3300 \cdot 10^{-13}$	$6,2990 \cdot 10^{-2}$	10 ⁴	$3,6384 \cdot 10^{-1}$	$2,1021 \cdot 10^{-2}$	$-1,3300 \cdot 10^{-13}$	$6,2990 \cdot 10^{-2}$
10 ⁵	$3,6443 \cdot 10^{-2}$	$2,1059 \cdot 10^{-2}$	$-1,4880 \cdot 10^{-12}$	$6,3104 \cdot 10^{-1}$	10 ⁵	$3,6443 \cdot 10^{-2}$	$2,1059 \cdot 10^{-2}$	$-1,4880 \cdot 10^{-12}$	$6,3104 \cdot 10^{-1}$
10 ⁶	$3,6449 \cdot 10^{-3}$	$2,1063 \cdot 10^{-2}$	$1,1217 \cdot 10^{-11}$	6,3115	10 ⁶	$3,6449 \cdot 10^{-3}$	$2,1063 \cdot 10^{-2}$	$1,1217 \cdot 10^{-11}$	6,3116
10 ⁷	$3,6463 \cdot 10^{-4}$	$2,1149 \cdot 10^{-2}$	$-8,7121 \cdot 10^{-11}$	$6,3143 \cdot 10^{-1}$	10 ⁷	$3,6497 \cdot 10^{-4}$	$2,1126 \cdot 10^{-2}$	$-8,7121 \cdot 10^{-11}$	$6,3313 \cdot 10^{-1}$
10 ⁸	$3,6266 \cdot 10^{-5}$	$2,0948 \cdot 10^{-2}$		$6,2772 \cdot 10^{-2}$	10 ⁸	$3,6266 \cdot 10^{-5}$	$2,0948 \cdot 10^{-2}$		$6,2772 \cdot 10^{-2}$
10 ⁹	$3,6266 \cdot 10^{-6}$	$2,0947 \cdot 10^{-2}$		$6,2772 \cdot 10^{-3}$	10 ⁹	$3,6266 \cdot 10^{-6}$	$2,0947 \cdot 10^{-2}$		$6,2772 \cdot 10^{-3}$
10 ¹⁰	$3,6266 \cdot 10^{-7}$	$2,0955 \cdot 10^{-2}$		$6,2772 \cdot 10^{-4}$	10 ¹⁰	$3,6266 \cdot 10^{-7}$	$2,0955 \cdot 10^{-2}$		$6,2772 \cdot 10^{-4}$
10 ¹¹	$3,6266 \cdot 10^{-8}$	$2,0918 \cdot 10^{-2}$		$6,2772 \cdot 10^{-5}$	10 ¹¹	$3,6266 \cdot 10^{-8}$	$2,0918 \cdot 10^{-2}$		$6,2772 \cdot 10^{-5}$
10 ¹²	$3,6266 \cdot 10^{-9}$	$2,1828 \cdot 10^{-11}$		$6,2772 \cdot 10^{-6}$	10 ¹²	$3,6266 \cdot 10^{-9}$	$2,1828 \cdot 10^{-11}$		$6,2771 \cdot 10^{-6}$
10 ¹³	$3,6266 \cdot 10^{-10}$	0		$6,2771 \cdot 10^{-7}$	10 ¹³	$3,6266 \cdot 10^{-10}$	0		$6,2771 \cdot 10^{-7}$
10 ¹⁴	$3,6266 \cdot 10^{-11}$	0		$6,2748 \cdot 10^{-8}$	10 ¹⁴	$3,6266 \cdot 10^{-11}$	0		$6,2399 \cdot 10^{-8}$
10 ¹⁵	$3,6380 \cdot 10^{-12}$	0		$6,2864 \cdot 10^{-9}$	10 ¹⁵	$3,6380 \cdot 10^{-12}$	0		0
10 ¹⁶	$3,6948 \cdot 10^{-13}$	0		0	10 ¹⁶	$3,6948 \cdot 10^{-13}$	0		0
	v_F	t_F		x_N		v_F	t_F		x_N
10 ⁷	230,258419745292	10002,4827414183		744157,179575260	10 ⁷	230,257805988392	10002,4827409090		4434160,57039689
10 ⁸	230,258456011638	10002,4827416278		744157,242347202	10 ⁸	230,257842254657	10002,4827411185		4434160,63316912
10 ⁹	230,258459638272	10002,4827416488		744157,248624396	10 ⁹	230,257845881283	10002,4827411395		4434160,63944635
10 ¹⁰	230,258460000936	10002,4827416509		744157,249252115	10 ¹⁰	230,257846243946	10002,4827411416		4434160,64007407
10 ¹¹	230,258460037202	10002,4827416511		744157,249314887	10 ¹¹	230,257846280212	10002,4827411418		4434160,64013684
10 ¹²	230,258460040829	10002,4827416511		744157,249321164	10 ¹²	230,257846283839	10002,4827411418		4434160,64014312
10 ¹³	230,258460041192	10002,4827416511		744157,249321792	10 ¹³	230,257846284201	10002,4827411418		4434160,64014375
10 ¹⁴	230,258460041228	10002,4827416511		744157,249321855	10 ¹⁴	230,257846284238	10002,4827411418		4434160,64014381
10 ¹⁵	230,258460041231	10002,4827416511		744157,249321861	10 ¹⁵	230,257846284241	10002,4827411418		4434160,64014382
10 ¹⁶	230,258460041232	10002,4827416511		744157,249321862	10 ¹⁶	230,257846284242	10002,4827411418		4434160,64014382

a)
b)

N	v_F	t_F	m_N	x_N	N	v_F	t_F	m_N	x_N
10	196,011677951838	10002,2826191942	0,100000000000000	20684648,1809011	10	195,798241945411	10002,2826103399	0,100000000000000	100740248,476771
10 ¹	226,263782574663	10002,4597525694	0,099999999999999	20737730,9547342	10 ¹	226,016565669348	10002,4597418176	0,099999999999999	100793359,642360
10 ²	229,847470286295	10002,4804028168	0,099999999999989	20743919,0319696	10 ²	229,591238915968	10002,4803917961	0,099999999999989	100799551,023330
10 ³	230,206287313833	10002,4825049083	0,099999999999856	207444548,9428655	10 ³	229,954647601144	10002,4824938598	0,099999999999856	100800181,270485
10 ⁴	230,242728572615	10002,4827154982	0,099999999998368	20744612,04800015	10 ⁴	229,991048026237	10002,4827044481	0,099999999998368	100800244,409694
10 ⁵	230,246373417548	10002,4827365626	0,1000000000009585	20744618,3601214	10 ⁵	229,994689292966	10002,4827255184	0,1000000000009585	100800250,727051
10 ⁷	230,246739825310	10002,4827386978	0,099999999922464	20744619,0002277	10 ⁷	229,995062373247	10002,4827277682	0,099999999922464	100800251,401665
	δv_F	δt_F	δm_N	δx_N		δv_F	δt_F	δm_N	δx_N
$\bar{x}$	$3,6264 \cdot 10^{-2}$	$2,0949 \cdot 10^{-1}$		$6,2775 \cdot 10^{-6}$	$\bar{x}$	$3,6225 \cdot 10^{-2}$	$2,0950 \cdot 10^{-1}$		$6,2812 \cdot 10^{-6}$
10 ²	$3,0252 \cdot 10^{-1}$	$1,7713 \cdot 10^{-1}$	$-8,0491 \cdot 10^{-16}$	$5,3083 \cdot 10^{-4}$	10 ²	$3,0218 \cdot 10^{-1}$	$1,7713 \cdot 10^{-1}$	$-8,0491 \cdot 10^{-16}$	$5,3111 \cdot 10^{-4}$
10 ³	3,5787	$2,0650 \cdot 10^{-2}$	$-1,0700 \cdot 10^{-14}$	$6,1881 \cdot 10^{-2}$	10 ³	3,5747	$2,0650 \cdot 10^{-2}$	$-1,0700 \cdot 10^{-14}$	$6,1914 \cdot 10^{-2}$
10 ⁴	$3,6382 \cdot 10^{-1}$	$2,1021 \cdot 10^{-2}$	$-1,3300 \cdot 10^{-13}$	$6,2991 \cdot 10^{-2}$	10 ⁴	$3,6341 \cdot 10^{-1}$	$2,1021 \cdot 10^{-2}$	$-1,3300 \cdot 10^{-13}$	$6,3025 \cdot 10^{-2}$
10 ⁵	$3,6441 \cdot 10^{-2}$	$2,1059 \cdot 10^{-2}$	$-1,4880 \cdot 10^{-12}$	$6,3105 \cdot 10^{-1}$	10 ⁵	$3,6400 \cdot 10^{-2}$	$2,1059 \cdot 10^{-2}$	$-1,4880 \cdot 10^{-12}$	$6,3139 \cdot 10^{-1}$
10 ⁶	$3,6448 \cdot 10^{-3}$	$2,1064 \cdot 10^{-2}$	$1,1217 \cdot 10^{-11}$	6,3121	10 ⁶	$3,6413 \cdot 10^{-3}$	$2,1070 \cdot 10^{-2}$	$1,1217 \cdot 10^{-11}$	6,3174
10 ⁷	$3,6641 \cdot 10^{-4}$	$2,1352 \cdot 10^{-2}$	$-8,7121 \cdot 10^{-11}$	$6,4011 \cdot 10^{-1}$	10 ⁷	$3,7308 \cdot 10^{-4}$	$2,2498 \cdot 10^{-2}$	$-8,7121 \cdot 10^{-11}$	$6,7461 \cdot 10^{-1}$
10 ⁸	$3,6265 \cdot 10^{-5}$	$2,0949 \cdot 10^{-2}$		$6,2775 \cdot 10^{-2}$	10 ⁸	$3,6225 \cdot 10^{-5}$	$2,0950 \cdot 10^{-2}$		$6,2813 \cdot 10^{-2}$
10 ⁹	$3,6265 \cdot 10^{-6}$	$2,0949 \cdot 10^{-2}$		$6,2775 \cdot 10^{-3}$	10 ⁹	$3,6225 \cdot 10^{-6}$	$2,0949 \cdot 10^{-2}$		$6,2813 \cdot 10^{-3}$
10 ¹⁰	$3,6265 \cdot 10^{-7}$	$2,0955 \cdot 10^{-2}$		$6,2774 \cdot 10^{-4}$	10 ¹⁰	$3,6225 \cdot 10^{-7}$	$2,0955 \cdot 10^{-2}$		$6,2813 \cdot 10^{-4}$
10 ¹¹	$3,6265 \cdot 10^{-8}$	$2,0918 \cdot 10^{-2}$		$6,2775 \cdot 10^{-5}$	10 ¹¹	$3,6225 \cdot 10^{-8}$	$2,0918 \cdot 10^{-2}$		$6,2808 \cdot 10^{-5}$
10 ¹²	$3,6265 \cdot 10^{-9}$	$2,1828 \cdot 10^{-11}$		$6,2771 \cdot 10^{-6}$	10 ¹²	$3,6225 \cdot 10^{-9}$	$2,1828 \cdot 10^{-11}$		$6,2883 \cdot 10^{-6}$
10 ¹³	$3,6263 \cdot 10^{-10}$	0		$6,2957 \cdot 10^{-7}$	10 ¹³	$3,6226 \cdot 10^{-10}$	0		$6,2585 \cdot 10^{-7}$
10 ¹⁴	$3,6266 \cdot 10^{-11}$	0		$6,3330 \cdot 10^{-8}$	10 ¹⁴	$3,6238 \cdot 10^{-11}$	0		0
10 ¹⁵	$3,6380 \cdot 10^{-12}$	0		0	10 ¹⁵	$3,6096 \cdot 10^{-12}$	0		0
10 ¹⁶	$3,6948 \cdot 10^{-13}$	0		0	10 ¹⁶	$3,6948 \cdot 10^{-13}$	0		0
	v_F	t_F		x_N		v_F	t_F		x_N
10 ⁷	230,246736063268	10002,4827386575		20744618,9878669	10 ⁷	229,994689292966	10002,4827276134		100800251,355179
10 ⁸	230,246772327840	10002,4827388670		20744619,0506414	10 ⁸	229,994725518139	10002,4827278229		100800251,417992
10 ⁹	230,246775954297	10002,4827388879		20744619,0569189	10 ⁹	229,994729140657	10002,4827278438		100800251,424273
10 ¹⁰	230,246776316943	10002,4827388900		20744619,0575466	10 ¹⁰	229,994729502908	10002,4827278459		100800251,424902
10 ¹¹	230,246776353207	10002,4827388902		20744619,0576094	10 ¹¹	229,994729539134	10002,4827278461		100800251,424964
10 ¹²	230,246776356834	10002,4827388902		20744619,0576157	10 ¹²	229,994729542756	10002,4827278462		100800251,424971
10 ¹³	230,246776357197	10002,4827388902		20744619,0576163	10 ¹³	229,994729543118	10002,4827278462		100800251,424971
10 ¹⁴	230,246776357233	10002,4827388902		20744619,0576164	10 ¹⁴	229,994729543155	10002,4827278462		100800251,424971
10 ¹⁵	230,246776357236	10002,4827388902		20744619,0576164	10 ¹⁵	229,994729543158	10002,4827278462		100800251,424971
10 ¹⁶	230,246776357237	10002,4827388902		20744619,0576164	10 ¹⁶	229,994729543159	10002,4827278462		100800251,424971

C.4 Relativistische Raketengleichung nach J. Akeret

Von J. Akeret gibt es bereits seit dem Jahre 1946 eine analytische Lösung für die relativistische Raketengleichung [90]. Hierzu ist nicht nur der Impulssatz und die relativistische Geschwindigkeitsaddition erforderlich (wie bei der bisher dargestellten numerischen Ableitung) sondern es wird zusätzlich der Energieerhaltungssatz verwendet.

Für die Aufstellung der Gleichungen werden Formelzeichen verwendet, die vom Originaltext abweichen aber konsistent mit den bisher in diesem Text genutzten Darstellungen sind. Funktionen bezogen auf das austretende Gas sind mit f' gekennzeichnet; Beziehungen, die auf die bewegte Rakete verweisen, werden dagegen ohne diese Kennzeichnung dargestellt. Die aktuelle Masse der Rakete ist m , und dm' ist der Anteil des austretenden Gases. Daraus ergeben sich die im Folgenden dargestellten Gleichungen.

a) Der Energiesatz liefert:

$$d \left\{ \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right\} = - \frac{dm' \cdot c^2}{\sqrt{1 - v'^2/c^2}} \quad (\text{C. 21})$$

b) der Impulssatz:

$$d \left\{ \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right\} = \frac{dm' \cdot v'}{\sqrt{1 - v'^2/c^2}} \quad (\text{C. 22})$$

c) das relativistische Additionstheorem:

$$v' = \frac{v'_0 - v}{1 - \frac{v \cdot v'_0}{c^2}} \quad (\text{C. 23})$$

wobei v'_0 die Bedeutung der (konstanten) Austrittsgeschwindigkeit des Gases relativ zur Rakete hat. Die Gleichungen (C. 21) und (C. 22) lassen sich weiterentwickeln zu

$$dm \frac{c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + mc^2 \cdot d \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right\} = -dm' \frac{c^2}{\sqrt{1 - v'^2/c^2}} \quad (\text{C. 24})$$

$$dm \frac{v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + m \frac{dv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + mv \cdot d \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right\} = dm' \frac{v'}{\sqrt{1 - v'^2/c^2}} \quad (\text{C. 25})$$

Zur Lösung müssen die Werte von v' und dm' eliminiert werden. Dazu wird zuerst in Gleichung Gl. (C. 24) im Term auf der rechten Seite für v' der Wert aus Gl. (C. 23) eingesetzt

$$\begin{aligned} \frac{c^2}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}} &= \frac{c^2}{\sqrt{1 - \frac{\left(\frac{v'_0 - v}{1 - \frac{v \cdot v'_0}{c^2}} \right)^2}{c^2}}} \\ &= \frac{c^2 - v'_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} - \frac{v'^2_0}{c^2} + \frac{v^2 v'^2_0}{c^4}}} = \frac{c^2 - v'_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{v'^2_0}{c^2}}} \end{aligned} \quad (\text{C. 26})$$

In gleicher Weise folgt

$$\frac{v'}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}} = \frac{v'_0 - v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{v'^2_0}{c^2}}} \quad (\text{C. 27})$$

Die Gleichungen (C. 26) und (C. 27) werden in Gl. (C. 24) und Gl. (C. 25) eingesetzt, diese jeweils nach dm' aufgelöst und gleichgesetzt. Es entsteht:

$$m \left\{ \frac{c^2 - vv'_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right\} dv + mv'_0(c^2 - v^2) \cdot d \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right\} + dm \frac{v'_0(c^2 - v^2)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 0 \quad (\text{C. 28})$$

Die beiden Differentiale mit der Abhängigkeit von v werden vereinheitlicht und unter Verwendung der Kettenregel folgt

$$d \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right\} = \frac{v}{c^2 \left\{ 1 - \frac{v^2}{c^2} \right\}^{3/2}} dv \quad (\text{C. 29})$$

Nach dem Einsetzen in Gl. (C. 28) und Separierung der Terme für Masse und Geschwindigkeit folgt das Endergebnis

$$\frac{dm}{m} = - \frac{dv}{v'_0(1 - v^2/c^2)} \quad (\text{C. 30})$$

Die Integration ergibt

$$\ln \{m\} = - \frac{c}{2v'_0} \ln \left\{ \frac{c+v}{c-v} \right\} + C \quad (\text{C. 31})$$

Mit dem Anfangswert m_0 und dem Endwert m entsteht die *Relativistische Raketengleichung* nach J. Akeret

$$\frac{m}{m_0} = \left\{ \frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}} \right\}^{c/2v'_0} \quad (\text{C. 32})$$

oder

$$\frac{v}{c} = \frac{1 - \left(\frac{m}{m_0}\right)^{2v'_0/c}}{1 + \left(\frac{m}{m_0}\right)^{2v'_0/c}} \quad (\text{C. 33})$$

In Kap. 6.4.2 werden Berechnungen aus dieser Gleichung mit der klassischen Raketenformel nach Ziolkowski und den in dieser Anlage abgeleiteten numerischen Beziehungen gegenübergestellt.