

Anlage D: Impulsberechnung für relativistischen nicht elastischen Stoß

Beim vollkommen nicht elastischen d. h. rein plastischen Stoß treffen 2 Massen zentral aufeinander und sollen sich gemeinsam ohne Rotation weiterbewegen. Es wird hier ein Näherungsverfahren zur Ermittlung der Endgeschwindigkeit eines Körpers auf Basis des Impulserhaltungssatzes entwickelt, bei dem die Beziehung $m_3 = m_1 + m_2$ vorausgesetzt wird. Dieser Ansatz ist nur wichtig für eine theoretische Betrachtung, denn es zeigt sich, dass zusätzlich eine Massenerhöhung Δm_3 durch Energieumwandlung zu berücksichtigen ist. Zur genauen Darstellung der Zusammenhänge sei auf Kap. 7.1 verwiesen.

Außerdem erlaubt die vorliegende einfache Beziehung einen genauen Vergleich zwischen den Iterationsverfahren der Rekursion, nach Newton und der Bisektion. Letzteres stellt sich dabei als überlegen heraus, weil es als einziges für alle Ausgangswerte Ergebnisse liefert und wird daher auch bei den Berechnungen in den Anlagen A – C genutzt.

Unter den genannten Einschränkungen ergibt sich für den relativistischen Impuls bei Nutzung die Beziehung $m_3 = m_1 + m_2$ aus Gl. (7.01)

$$p_0 = m_1 \gamma_1 v_1 + m_2 \gamma_2 v_2 = (m_1 + m_2) \gamma_3 v_3 \quad (\text{D.01})$$

aus der der Wert v_3 auf numerische Weise ermittelt werden kann. Hierzu werden im Folgenden unterschiedliche Verfahren genutzt und die Ergebnisse gegenübergestellt.

D.1 Rekursionsverfahren

Das Verfahren mit dem geringsten mathematischen Aufwand ist die einfache Rekursion. Die Entwicklungsgleichung kann direkt aus Gl. (D.01) bestimmt werden mit

$$\frac{(v_3)_{k+1}}{c} = \frac{p_0}{c(m_1 + m_2) \gamma_{3k}} = \frac{p_0}{c(m_1 + m_2)} \sqrt{1 - \left(\frac{(v_3)_k}{c}\right)^2} \quad (\text{D.02})$$

D.2 Verfahren nach Newton

Bei einer Iteration nach dem Newton-Verfahren ergibt sich allgemein die Folge

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad (\text{D.03})$$

Wird die Gleichung Gl. (D.01) umgeformt so folgt zunächst

$$\frac{m_1 \gamma_1 v_1 + m_2 \gamma_2 v_2}{m_1 + m_2} - \gamma_3 v_3 = 0 = f(v_3) \quad (\text{D.04})$$

Anlage D: Impulsberechnung für relativistischen nicht elastischen Stoß

und daraus

$$f\left(\frac{v_3}{c}\right) = \frac{p_0}{c(m_1 + m_2)} - \frac{v_3}{c} \left(1 - \frac{v_3^2}{c^2}\right)^{-1/2} \quad (\text{D.05})$$

Mit

$$x = \frac{v_3}{c} \quad (\text{D.06})$$

Folgt

$$f(x) = \frac{p_0}{(m_1 + m_2)} - x(1 - x^2)^{-1/2} \quad (\text{D.07})$$

und

$$f'(x) = -(1 - x^2)^{-3/2} \quad (\text{D.08})$$

Nach Einsetzen in Gl. (D.03) erhält die Iterationsformel somit die Form

$$\frac{(v_3)_{k+1}}{c} = \frac{(v_3)_k}{c} + \frac{\frac{p_0}{(m_1 + m_2)} - (v_3)_k \left[1 - \left(\frac{(v_3)_k}{c}\right)^2\right]^{-1/2}}{c \left[1 - \left(\frac{(v_3)_k}{c}\right)^2\right]^{-3/2}} \quad (\text{D.09})$$

D.3 Bisektion

Zunächst wird die Ausgangsfunktion aus Gl. (D.01) definiert, und zwar

$$f(v_3) = \gamma_3 v_3 = \frac{p_0}{(m_1 + m_2)} \quad (\text{D.10})$$

wobei die Größe von p_0 durch die gegebenen Ausgangsbedingungen definiert ist. Zur Berechnung werden zunächst geeignete Startwerte $(v_{3+})_0$ und $(v_{3-})_0$ bestimmt, für die gilt

$$f(v_{3+})_0 > \frac{p_0}{(m_1 + m_2)} \quad (\text{D.11})$$

und

$$f(v_{3-})_0 < \frac{p_0}{(m_1 + m_2)} \quad (\text{D.12})$$

Die Funktion $f(v_3)$ muss im Intervall $[(v_{3-})_0; (v_{3+})_0]$ stetig und differenzierbar sein, außerdem ist $f'(v_3) \neq 0$ gefordert, d. h. es darf im Definitionsintervall keine Minima oder Maxima geben, da sonst keine eindeutige Lösung existiert. Daraufhin wird der Mittelwert gebildet

$$(v_3)_1 = \frac{(v_{3+})_0 + (v_{3-})_0}{2} \quad (\text{D.13})$$

und $f(v_3)_1$ gemäß Gl. (D.10) berechnet. Es gelten dann die folgenden Festlegungen:

$$f(v_3)_1 > \frac{p_0}{(m_1 + m_2)} : \Rightarrow (v_{3+})_1 = (v_3)_1 \text{ und } (v_{3-})_1 = (v_{3-})_0 \quad (\text{D.14})$$

$$f(v_3)_1 < \frac{p_0}{(m_1 + m_2)} : \Rightarrow (v_{3+})_1 = (v_{3+})_0 \text{ und } (v_{3-})_1 = (v_3)_1 \quad (\text{D.15})$$

Anlage D: Impulsberechnung für relativistischen nicht elastischen Stoß

Diese Berechnung wird mit steigendem Index von 1 bis n so lange wiederholt, bis die gewünschte Genauigkeit erreicht wird. Mit jedem Berechnungsschritt wird die Differenz zwischen v_{3+} und v_{3-} halbiert. Bei Nutzung eines Standardprogramms zur Tabellenkalkulation (z. B. Microsoft Excel[®]) mit einer Berechnungsgenauigkeit von 15 Stellen sind demgemäß wegen der Abschätzung

$$2^{10} = 1024 \approx 10^3 \quad (\text{D. 16})$$

und damit

$$10^{15} \approx 2^{50} \quad (\text{D. 17})$$

etwa 50 Schritte erforderlich, um die maximal mögliche Genauigkeit zu erreichen; als sicher in allen Fällen haben sich 60 erwiesen. Wegen der Randbedingung $v_1 = 0$ können die Startwerte einfach festgelegt werden und sind für $(v_{3-})_0 = 0$ und $(v_{3+})_0 = v_2$.

D.4 Auswertung

Im Folgenden sind die Ergebnisse der dargestellten Verfahren für unterschiedliche Geschwindigkeiten dargestellt. Gemäß den Überlegungen in Kap. 7.1 werden hier nur Fälle betrachtet, bei der die Massen gleich sind und eine der Geschwindigkeiten (hier: v_1) gleich 0 ist. Alle Iterationsbeziehungen führen zu den gleichen Ergebnissen; die Verfahren mit einfacher Rekursion und nach Newton haben den Vorteil, dass sie bei geringen Werten von v_2/c schneller konvergieren. Sie weisen aber den Nachteil auf, dass die Konvergenz bei hohen Geschwindigkeiten nachlässt und ab $p_0 = \gamma_2 v_2 \geq 2c$ (für $m_1 = m_2 = 1$) nicht mehr gegeben ist, während die Bisektion ein deutlich besseres Verhalten zeigt und ab etwa $v_2/c > 0,895$ als einziges Verfahren noch funktioniert.

In den nachfolgenden Tabellen sind Beispiele für Berechnungen mit verschiedenen Randbedingungen wiedergegeben. Es ist dabei gekennzeichnet, ab wann bei der Berechnung kein Unterschied mehr zwischen den aufeinander folgenden Iterationsschritten ermittelt werden kann und der Vorgang damit beendet ist (Statusabfrage „x“ im Feld „St“). Führt ein Verfahren nicht zur Konvergenz wird dies bei der Bewertung mit „nicht ok“ gekennzeichnet. Außerdem wurde der prozentuale Unterschied zu dem sich aus der relativistischen Geschwindigkeitsaddition ergebenden Wert $v_{3,Rel}$ berechnet.

In den Tabellen werden folgende Formeln verwendet:

$$\frac{v_{3,Rel}}{c} = \frac{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{v_2}{c}\right)^2}}{\frac{v_2}{c}} \quad \gamma_{3,Rel} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_{3,Rel}}{c}\right)^2}} \quad \frac{p_0}{c} = m_2 \gamma_2 \frac{v_2}{c}$$

$$\text{Rekursion:} \quad \frac{(v_3)_{k+1}}{c} = \frac{p_0}{c(m_1 + m_2)} \sqrt{1 - \left(\frac{(v_3)_k}{c}\right)^2}$$

Newton:

$$\frac{(v_3)_{k+1}}{c} = \frac{(v_3)_k}{c} + \left\{ \frac{p_0}{c(m_1 + m_2)} - \frac{(v_3)_k}{c} \left[1 - \left(\frac{(v_3)_k}{c}\right)^2 \right]^{-1/2} \right\} \left[1 - \left(\frac{(v_3)_k}{c}\right)^2 \right]^{3/2}$$

Anlage D: Impulsberechnung für relativistischen nicht elastischen Stoß

Bisektion:
$$\frac{(v_3)_{k+1}}{c} = \frac{(v_{3-})_k + (v_{3+})_k}{2c}$$

Abfrage $f(v_3)_{k+1} > \frac{p_0}{(m_1 + m_2)} : \Rightarrow (v_{3+})_{k+1} = (v_3)_{k+1} \text{ und } (v_{3-})_{k+1} = (v_{3-})_k$

Abfrage $f(v_3)_{k+1} < \frac{p_0}{(m_1 + m_2)} : \Rightarrow (v_{3+})_{k+1} = (v_{3+})_k \text{ und } (v_{3-})_{k+1} = (v_3)_{k+1}$

Zweckmäßige Startwerte: Für $\frac{(v_{3-})_0}{c} = \frac{v_1}{c}$ und für $\frac{(v_{3+})_0}{c} = \frac{v_2}{c}$

Die Formeln in den Ergebnisfeldern (blau eingefärbt): Für Rekursion, Newton und Bisektion jeweils die letzten Werte der Iteration.

$\frac{v_3}{v_{3,Rel}} - 1$ Ergebnisvergleich. Gewählt wurde das Ergebnis der Bisektion (v_3) und die relativistische Geschwindigkeitsaddition ($v_{3,Rel}$) in %

Für die Berechnungen wurden folgende Fälle ausgewählt:

Tab. D.1	Tab. D.2	Tab. D.3
$m_1 = 1; m_2 = 1$	$m_1 = 1; m_2 = 1$	$m_1 = 1; m_2 = 1$
$v_1 = 0 ; v_2 = 0,1c$	$v_1 = 0 ; v_2 = 0,8c$	$v_1 = 0 ; v_2 = 0,89c$

D5. Codes für Tabellenkalkulation:

Koordinate	Code
G1	= (1-(1-B2^2)^(1/2))/B2
G2	= (1-G1^2)^(1/2)
B3	= B2*(1-B2^2)^(-1/2)
B5	= WENN(B6="ok";B70;"")
D5	= WENN(D6="ok";D70;"")
F5	= WENN(F6="ok";F70;"")
H5	= F5/G1-1
B6	= WENN(C70="";"nicht ok";"ok")
D6	= WENN(E70="";"nicht ok";"ok")
F6	= WENN(G70="";"nicht ok";"ok")
B8	= B70/D70-1
D8	= D70/F70-1
F8	= F70/B70-1
G10	= B1
H10	= B2
B11	= B\$3/(1+D\$2)*(1-B10^2)^(1/2)
C11	= WENN(B11=B10;"x";"")
D11	= D10+(B\$3/(1+D\$2)-D10*(1-D10^2)^(-1/2))*((1-D10^2)^(3/2))
E11	= WENN(D11=D10;"x";"")
F11	= (G10+H10)/2
G11	= WENN(F11*(1-F11^2)^(-1/2)<B\$3/(1+D\$2);F11;G10)
H11	= WENN(F11*(1-F11^2)^(-1/2)<B\$3/(1+D\$2);H10;F11)
I11	= WENN(F11=F10;"x";"")

Die Codes B11 bis I11 erlauben ein Kopieren, hier B70 bis I70

Anlage D: Impulsberechnung für relativistischen nicht elastischen Stoß

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	$v_1/c =$	0		$m_2/m_1 =$		$v_{3,Rel}/c =$	0,05012563		
2	$v_2/c =$	0,1		1		$\gamma_{3,Rel} =$	1,00125866		
3	$p_0/c =$	0,1005037815							
4		Rekursion		Newton		Bisektion			
5	$v_3/c =$	0,0501885613		0,0501885613		0,0501885613	$v_3/v_{3,Rel} =$	0,1%	
6		ok		ok		ok			
7		Rekursion/Newton		Newton/Bisektion		Bisektion/Rekursion			
8		0,0E+00		7,1E-15		-7,2E-15			
9	k	v_3/c	St	v_3/c	St	$(v_{3-}+v_{3+})/2c$	v_{3-}/c	v_{3+}/c	St
10	0	0		0			0	0,1	
11	1	0,0502518908		0,0502518908		0,0500000000	0,0500000000	0,1000000000	
12	2	0,0501884013		0,0501885616		0,0750000000	0,0500000000	0,0750000000	
13	3	0,0501885617		0,0501885613		0,0625000000	0,0500000000	0,0625000000	
14	4	0,0501885613		0,0501885613	x	0,0562500000	0,0500000000	0,0562500000	
15	5	0,0501885613		0,0501885613	x	0,0531250000	0,0500000000	0,0531250000	
16	6	0,0501885613		0,0501885613	x	0,0515625000	0,0500000000	0,0515625000	
17	7	0,0501885613	x	0,0501885613	x	0,0507812500	0,0500000000	0,0507812500	
18	8	0,0501885613	x	0,0501885613	x	0,0503906250	0,0500000000	0,0503906250	
19	9	0,0501885613	x	0,0501885613	x	0,0501953125	0,0500000000	0,0501953125	
20	10	0,0501885613	x	0,0501885613	x	0,0500976563	0,0500976563	0,0501953125	
21	11	0,0501885613	x	0,0501885613	x	0,0501464844	0,0501464844	0,0501953125	
22	12	0,0501885613	x	0,0501885613	x	0,0501708984	0,0501708984	0,0501953125	
23	13	0,0501885613	x	0,0501885613	x	0,0501831055	0,0501831055	0,0501953125	
24	14	0,0501885613	x	0,0501885613	x	0,0501892090	0,0501831055	0,0501892090	
25	15	0,0501885613	x	0,0501885613	x	0,0501861572	0,0501861572	0,0501892090	
26	16	0,0501885613	x	0,0501885613	x	0,0501876831	0,0501876831	0,0501892090	
27	17	0,0501885613	x	0,0501885613	x	0,0501884460	0,0501884460	0,0501892090	
28	18	0,0501885613	x	0,0501885613	x	0,0501888275	0,0501884460	0,0501888275	
29	19	0,0501885613	x	0,0501885613	x	0,0501886368	0,0501884460	0,0501886368	
30	20	0,0501885613	x	0,0501885613	x	0,0501885414	0,0501885414	0,0501886368	
31	21	0,0501885613	x	0,0501885613	x	0,0501885891	0,0501885414	0,0501885891	
32	22	0,0501885613	x	0,0501885613	x	0,0501885653	0,0501885414	0,0501885653	
33	23	0,0501885613	x	0,0501885613	x	0,0501885533	0,0501885533	0,0501885653	
34	24	0,0501885613	x	0,0501885613	x	0,0501885593	0,0501885593	0,0501885653	
35	25	0,0501885613	x	0,0501885613	x	0,0501885623	0,0501885593	0,0501885623	
36	26	0,0501885613	x	0,0501885613	x	0,0501885608	0,0501885608	0,0501885623	
37	27	0,0501885613	x	0,0501885613	x	0,0501885615	0,0501885608	0,0501885615	
38	28	0,0501885613	x	0,0501885613	x	0,0501885612	0,0501885612	0,0501885615	
39	29	0,0501885613	x	0,0501885613	x	0,0501885613	0,0501885612	0,0501885613	
40	30	0,0501885613	x	0,0501885613	x	0,0501885612	0,0501885612	0,0501885613	
41	31	0,0501885613	x	0,0501885613	x	0,0501885613	0,0501885613	0,0501885613	
42	32	0,0501885613	x	0,0501885613	x	0,0501885613	0,0501885613	0,0501885613	
60	50	0,0501885613	x	0,0501885613	x	0,0501885613	0,0501885613	0,0501885613	
61	51	0,0501885613	x	0,0501885613	x	0,0501885613	0,0501885613	0,0501885613	
62	52	0,0501885613	x	0,0501885613	x	0,0501885613	0,0501885613	0,0501885613	x
63	53	0,0501885613	x	0,0501885613	x	0,0501885613	0,0501885613	0,0501885613	x
64	54	0,0501885613	x	0,0501885613	x	0,0501885613	0,0501885613	0,0501885613	x
65	55	0,0501885613	x	0,0501885613	x	0,0501885613	0,0501885613	0,0501885613	x

Tab. D.1: Geschwindigkeit nach relativistischem nicht elastischem Stoß, $v_1 = 0$; $v_2 = 0,1c$

Anlage D: Impulsberechnung für relativistischen nicht elastischen Stoß

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	$v_1/c =$	0		$m_2/m_1 =$		$v_{3,Rel}/c =$	0,50000000		
2	$v_2/c =$	0,8		1		$\gamma_{3,Rel} =$	1,15470054		
3	$p_0/c =$	1,3333333333							
4		Rekursion		Newton		Bisektion			
5	$v_3/c =$	0,5547001962		0,5547001962		0,5547001962	$v_3/v_{3,Rel} =$	10,9%	
6		ok		ok		ok			
7		Rekursion/Newton		Newton/Bisektion		Bisektion/Rekursion			
8		0,0E+00		4,7E-15		-4,6E-15			
9	k	v_3/c	St	v_3/c	St	$(v_{3-}+v_{3+})/2c$	v_{3-}/c	v_{3+}/c	St
10	0	0		0			0	0,8	
11	1	0,6666666667		0,6666666667		0,4000000000	0,4000000000	0,8000000000	
12	2	0,4969039950		0,5723540713		0,6000000000	0,4000000000	0,6000000000	
13	3	0,5785370130		0,5550845393		0,5000000000	0,5000000000	0,6000000000	
14	4	0,5437707542		0,5547003739		0,5500000000	0,5500000000	0,6000000000	
15	5	0,5594891983		0,5547001962		0,5750000000	0,5500000000	0,5750000000	
16	6	0,5525584281		0,5547001962		0,5625000000	0,5500000000	0,5625000000	
17	7	0,5556494433		0,5547001962	x	0,5562500000	0,5500000000	0,5562500000	
18	8	0,5542777868		0,5547001962	x	0,5531250000	0,5531250000	0,5562500000	
19	9	0,5548878305		0,5547001962	x	0,5546875000	0,5546875000	0,5562500000	
20	10	0,5546167828		0,5547001962	x	0,5554687500	0,5546875000	0,5554687500	
21	11	0,5547372648		0,5547001962	x	0,5550781250	0,5546875000	0,5550781250	
22	12	0,5546837205		0,5547001962	x	0,5548828125	0,5546875000	0,5548828125	
23	13	0,5547075186		0,5547001962	x	0,5547851563	0,5546875000	0,5547851563	
24	14	0,5546969418		0,5547001962	x	0,5547363281	0,5546875000	0,5547363281	
25	15	0,5547016426		0,5547001962	x	0,5547119141	0,5546875000	0,5547119141	
26	16	0,5546995534		0,5547001962	x	0,5546997070	0,5546997070	0,5547119141	
27	17	0,5547004819		0,5547001962	x	0,5547058105	0,5546997070	0,5547058105	
28	18	0,5547000692		0,5547001962	x	0,5547027588	0,5546997070	0,5547027588	
29	19	0,5547002527		0,5547001962	x	0,5547012329	0,5546997070	0,5547012329	
30	20	0,5547001711		0,5547001962	x	0,5547004700	0,5546997070	0,5547004700	
31	21	0,5547002074		0,5547001962	x	0,5547000885	0,5547000885	0,5547004700	
32	22	0,5547001913		0,5547001962	x	0,5547002792	0,5547000885	0,5547002792	
33	23	0,5547001984		0,5547001962	x	0,5547001839	0,5547001839	0,5547002792	
34	24	0,5547001952		0,5547001962	x	0,5547002316	0,5547001839	0,5547002316	
35	25	0,5547001967		0,5547001962	x	0,5547002077	0,5547001839	0,5547002077	
36	26	0,5547001960		0,5547001962	x	0,5547001958	0,5547001958	0,5547002077	
37	27	0,5547001963		0,5547001962	x	0,5547002017	0,5547001958	0,5547002017	
38	28	0,5547001962		0,5547001962	x	0,5547001988	0,5547001958	0,5547001988	
39	29	0,5547001962		0,5547001962	x	0,5547001973	0,5547001958	0,5547001973	
40	30	0,5547001962		0,5547001962	x	0,5547001965	0,5547001958	0,5547001965	
41	31	0,5547001962		0,5547001962	x	0,5547001962	0,5547001962	0,5547001965	
42	32	0,5547001962		0,5547001962	x	0,5547001963	0,5547001962	0,5547001963	
60	50	0,5547001962	x	0,5547001962	x	0,5547001962	0,5547001962	0,5547001962	
61	51	0,5547001962	x	0,5547001962	x	0,5547001962	0,5547001962	0,5547001962	x
62	52	0,5547001962	x	0,5547001962	x	0,5547001962	0,5547001962	0,5547001962	x
63	53	0,5547001962	x	0,5547001962	x	0,5547001962	0,5547001962	0,5547001962	
64	54	0,5547001962	x	0,5547001962	x	0,5547001962	0,5547001962	0,5547001962	x
65	55	0,5547001962	x	0,5547001962	x	0,5547001962	0,5547001962	0,5547001962	x

Tab. D.2: Geschwindigkeit nach relativistischem nicht elastischem Stoß, $v_1 = 0$; $v_2 = 0,8c$

Anlage D: Impulsberechnung für relativistischen nicht elastischen Stoß

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	$v_1/c =$	0		$m_2/m_1 =$		$v_{3,Rel}/c =$	0,61128031		
2	$v_2/c =$	0,89		1		$\gamma_{3,Rel} =$	1,26356090		
3	$p_0/c =$	1,9519233617							
4		Rekursion		Newton		Bisektion			
5	$v_3/c =$			0,6984528781		0,6984528781	$v_3/v_{3,Rel} =$	14,3%	
6		nicht ok		ok		ok			
7		Rekursion/Newton		Newton/Bisektion		Bisektion/Rekursion			
8		3,4E-02		0,0E+00		-3,3E-02			
9	k	v_3/c	St	v_3/c	St	$(v_{3-}+v_{3+})/2c$	v_{3-}/c	v_{3+}/c	St
10	0	0		0			0	0,89	
11	1	0,9759616809		0,9759616809		0,4450000000	0,4450000000	0,8900000000	
12	2	0,2127032246		0,9397078220		0,6675000000	0,6675000000	0,8900000000	
13	3	0,9536286032		0,8688424449		0,7787500000	0,6675000000	0,7787500000	
14	4	0,2937506647		0,7743135001		0,7231250000	0,6675000000	0,7231250000	
15	5	0,9329042795		0,7115556340		0,6953125000	0,6953125000	0,7231250000	
16	6	0,3514676442		0,6988106129		0,7092187500	0,6953125000	0,7092187500	
17	7	0,9136953543		0,6984531401		0,7022656250	0,6953125000	0,7022656250	
18	8	0,3966306344		0,6984528781		0,6987890625	0,6953125000	0,6987890625	
19	9	0,8959116343		0,6984528781		0,6970507813	0,6970507813	0,6987890625	
20	10	0,4335537100		0,6984528781	x	0,6979199219	0,6979199219	0,6987890625	
21	11	0,8794661312		0,6984528781	x	0,6983544922	0,6983544922	0,6987890625	
22	12	0,4645201595		0,6984528781	x	0,6985717773	0,6983544922	0,6985717773	
23	13	0,8642751101		0,6984528781	x	0,6984631348	0,6983544922	0,6984631348	
24	14	0,4909276759		0,6984528781	x	0,6984088135	0,6984088135	0,6984631348	
25	15	0,8502581396		0,6984528781	x	0,6984359741	0,6984359741	0,6984631348	
26	16	0,5137129813		0,6984528781	x	0,6984495544	0,6984495544	0,6984631348	
27	17	0,8373381377		0,6984528781	x	0,6984563446	0,6984495544	0,6984563446	
28	18	0,5335439275		0,6984528781	x	0,6984529495	0,6984495544	0,6984529495	
29	19	0,8254414098		0,6984528781	x	0,6984512520	0,6984512520	0,6984529495	
30	20	0,5509184645		0,6984528781	x	0,6984521008	0,6984521008	0,6984529495	
31	21	0,8144976752		0,6984528781	x	0,6984525251	0,6984525251	0,6984529495	
32	22	0,5662205832		0,6984528781	x	0,6984527373	0,6984527373	0,6984529495	
33	23	0,8044400793		0,6984528781	x	0,6984528434	0,6984528434	0,6984529495	
34	24	0,5797542286		0,6984528781	x	0,6984528965	0,6984528434	0,6984528965	
35	25	0,7952051896		0,6984528781	x	0,6984528700	0,6984528700	0,6984528965	
36	26	0,5917650167		0,6984528781	x	0,6984528832	0,6984528700	0,6984528832	
37	27	0,7867329748		0,6984528781	x	0,6984528766	0,6984528766	0,6984528832	
38	28	0,6024547712		0,6984528781	x	0,6984528799	0,6984528766	0,6984528799	
39	29	0,7789667662		0,6984528781	x	0,6984528782	0,6984528766	0,6984528782	
40	30	0,6119916160		0,6984528781	x	0,6984528774	0,6984528774	0,6984528782	
41	31	0,7718532028		0,6984528781	x	0,6984528778	0,6984528778	0,6984528782	
42	32	0,6205171991		0,6984528781	x	0,6984528780	0,6984528780	0,6984528782	
60	50	0,6671025921		0,6984528781	x	0,6984528781	0,6984528781	0,6984528781	
61	51	0,7270581323		0,6984528781	x	0,6984528781	0,6984528781	0,6984528781	x
62	52	0,6700717735		0,6984528781	x	0,6984528781	0,6984528781	0,6984528781	x
63	53	0,7244527587		0,6984528781	x	0,6984528781	0,6984528781	0,6984528781	x
64	54	0,6727542511		0,6984528781	x	0,6984528781	0,6984528781	0,6984528781	x
65	55	0,7220808780		0,6984528781	x	0,6984528781	0,6984528781	0,6984528781	x

Tab. D.3: Geschwindigkeit nach relativistischem nicht elastischem Stoß, $v_1 = 0$; $v_2 = 0,89c$