

Anlage E: Kurze Einführung in die Vektorrechnung

Um die Darstellung der Maxwell-Gleichungen in Kapitel 10 zu verstehen sind Grundkenntnisse der Vektorrechnung erforderlich. Die hierfür notwendigen Beziehungen sowie grundlegende Elemente zum Verständnis von Feldzusammenhängen sind hier in kurzer Form zusammengefasst. Dargestellt sind nur die unbedingt erforderlichen Beziehungen und es gelten folgende Einschränkungen:

1. Die Darstellungen gelten für 3 Dimensionen; diese sind für die Verhältnisse in Feldern ausreichend.
2. Es werden ausschließlich kartesische (rechtwinklige) Koordinatensysteme betrachtet (also z. B. keine Kugel- oder Zylinderkoordinaten).

Zunächst werden die grundsätzlichen Eigenschaften von Vektoren dargestellt und dann die zum Verständnis der Maxwell-Gleichungen erforderlichen Differenzialfunktionen erläutert.

E.1 Skalar und Vektor

In einem Koordinatensystem können jedem Punkt physikalische Größen als Skalar oder Vektor zugeordnet werden. Vektoren sind richtungsabhängig, Skalare sind dies nicht. Beispiele für skalare Größen sind Temperatur, Arbeit und Druck. Für richtungsgebundene Größen wie z. B. Kräfte oder Felder werden dagegen Vektoren genutzt, die neben der Ortsangabe im Koordinatensystem auch Werte für den Betrag und die Richtung beinhalten. Die Darstellung eines Vektors $\vec{a}$ in kartesischen Koordinaten erfolgt in der Form

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \quad (\text{E. 01})$$

Der Betrag von $\vec{a}$, zum Beispiel für die Größe einer Kraft, wird bestimmt durch

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad (\text{E. 02})$$

Sind Richtung und Betrag zweier Vektoren gleich groß so sind diese identisch, können sich aber an unterschiedlichen Punkten im Koordinatensystem befinden.

E.2 Vektoraddition

Für die Addition zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gilt die Regel:

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{pmatrix} \quad (\text{E.03})$$

Diese Addition lässt sich auch grafisch ausführen. Dazu wird eine Darstellung mit Pfeilen verwendet; die Lage im Diagramm ist hierbei die Richtung, die Länge des Pfeils gibt die Größe des Betrags an.

Für die Addition werden die Pfeile $\vec{a}$ und $\vec{b}$ miteinander verbunden; die entstehende Linie zwischen Anfangs- und Endpunkten ist nach Betrag und Richtung das Ergebnis der Addition.

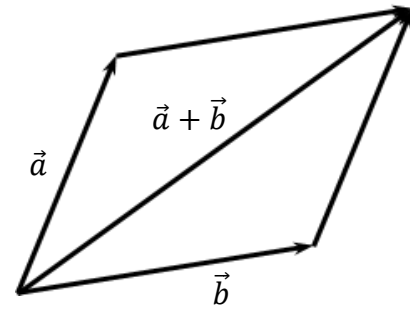


Abb. E.1: Grafische Vektoraddition

E.3 Skalarprodukt

Das Skalarprodukt (oder innere Produkt) zweier Vektoren wird so genannt, weil das Ergebnis der Multiplikation ein Skalar ist. Dies ist in kartesischen Koordinaten

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \quad (\text{E.04})$$

oder

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi \quad (\text{E.05})$$

mit φ als Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Diese Operation wird in der Physik oft gebraucht, wenn die Arbeit berechnet werden soll und der Winkel zwischen Kraft und Bewegungsrichtung nicht übereinstimmt. Kraft und Richtung sind Vektoren, das Ergebnis Arbeit ist eine skalare Größe. Anschaulich wird die Bedeutung klar, wenn man eine Masse im Schwerfeld der Erde und eine angreifende Kraft betrachtet. Wird die Masse von der Kraft nach oben bewegt ($\varphi = 0$; $\cos \varphi = 1$) so wird Arbeit verrichtet und die potenzielle Energie erhöht, greift die Kraft mit $\varphi = 90^\circ$ an, bleibt die Masse auf gleicher Höhe und die Energie ändert sich nicht.

E.4 Kreuzprodukt

Das Kreuzprodukt (auch vektorielles Produkt oder äußeres Produkt) der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ im dreidimensionalen Raum ist ein bestimmter Vektor, der senkrecht auf der von diesen aufgespannten Ebene steht. Die Länge ist gleich der Fläche des Parallelogramms, also

$$\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot |\sin \varphi| \quad (\text{E.06})$$

Im dreidimensionalen kartesischen Koordinatensystem ist das Kreuzprodukt folgendermaßen zu berechnen

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} \quad (\text{E.07})$$

Beispiele für die Anwendung des Kreuzprodukts sind die Lorentzkraft oder das Drehmoment. So gilt z. B die Beziehung für den magnetischen Teil der Lorentzkraft

$$\vec{F}_B = q \vec{v} \times \vec{B} \quad (\text{E.08})$$

mit q als Ladung und $\vec{v}$ als deren Geschwindigkeit sowie $\vec{B}$ als magnetische Feldstärke. Die Ausrichtung der entstehenden Lorentzkraft ist senkrecht sowohl zur Geschwindigkeit als auch zum Magnetfeld (3-Finger Regel).

E.5 Feldbegriff und Nabla-Operator

In der Physik ist ein Feld definiert als die räumliche Verteilung einer physikalischen Größe. Im einfachsten Fall liegt ein Skalarfeld vor, wie für Temperaturverteilungen oder Potentiale möglich. Ist ein physikalischer Vektor abhängig von der Lage des Ortes, spricht man von einem Vektorfeld. Es kann durch Feldlinien veranschaulicht werden, wobei die Tangente an die Feldlinie die Richtung des Vektors angibt. Der Betrag des Vektors wird durch die Dichte der Feldlinien dargestellt. Als Beispiele sind hier vor allem die elektrischen und magnetischen Felder zu nennen. Kennzeichnend für diese Felder ist der Umstand, dass insbesondere zeitliche Veränderungen eine Rolle spielen, die durch Differenziation dargestellt werden müssen. Hilfreich ist hierbei die Verwendung des Nabla-Operators.

Der Nabla-Operator $\vec{\nabla}$ ist ein vektorieller Differentialoperator. Das bedeutet, dass er in Vektorform geschrieben werden kann und bei Anwendung auf eine Funktion eine Differenzial-Operation durchführt, die eine 3-dimensionale Ableitung darstellt. Mit seiner Hilfe lassen sich die noch zu beschreibenden Größen Gradient, Divergenz und Rotation einfach darstellen. Er ist definiert für 3-dimensionale kartesische Koordinaten x, y, z als

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (\text{E.09})$$

E.6 Gradient

Ein Feld, dem eine skalare Funktion f zugrunde liegt, ordnet jedem Punkt im Definitionsraum eine Zahl zu. Beispiele für skalare Felder im dreidimensionalen Raum sind die Verteilung von Temperaturen, Dichte oder Potentialen. Die Anwendung des Nabla-Operators auf f ergibt ein Vektorfeld, das Gradient (grad) genannt wird. Der Gradient zeigt an jedem Punkt des Raumes in die Richtung des stärksten Anstiegs und sein Betrag gibt die Steigung in diese Richtung an. Die Darstellung ist folgende

$$\text{grad } f = \vec{\nabla} \cdot f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_x}{\partial x} \\ \frac{\partial f_y}{\partial y} \\ \frac{\partial f_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (\text{E. 10})$$

Ist das skalare Feld ein Potential, so gibt der negative Gradient des Feldes das zugehörige Kraftfeld an. Anschaulich klar ist das im Fall des Gravitationsfeldes: Zwei der Koordinaten sind gleich Null und ein Körper fällt in die Richtung, in der die Änderung seines Potentials maximal ist.

E.7 Divergenz

Bei Anwendung des Nabla-Operators auf ein Vektorfeld f ergibt das Skalarprodukt $\vec{\nabla} \cdot f$ ein skalares Feld, das in jedem Punkt des Raumes angibt, ob dort Feldlinien entstehen oder verschwinden. So ist am Ort einer positiven Punktladung die Divergenz des elektrischen Feldes größer als Null, da an diesem Punkt Feldlinien entstehen. Punkte mit positiver Divergenz werden Quellen genannt, Punkte mit negativer Divergenz dagegen Senken. Die Berechnung ergibt

$$\text{div } \vec{f} = \vec{\nabla} \cdot \vec{f} = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z} \quad (\text{E. 11})$$

E.8 Rotation

Bildet man $\vec{\nabla} \times f$, so erhält man eine Vektorfunktion, die Rotation (rot) genannt wird und die die Wirbel des Vektorfelds f charakterisiert. Betrachtet man z. B. das Magnetfeld eines stromdurchflossenen Drahtes, so verlaufen die Feldlinien kreisförmig um diesen Draht und sind geschlossen. Die Berechnung erfolgt auf folgende Weise:

$$\text{rot } \vec{f} = \vec{\nabla} \times \vec{f} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} f_z - \frac{\partial}{\partial z} f_y \\ \frac{\partial}{\partial z} f_x - \frac{\partial}{\partial x} f_z \\ \frac{\partial}{\partial x} f_y - \frac{\partial}{\partial y} f_x \end{pmatrix} \quad (\text{E. 12})$$